『九章算術』訳注†稿（３）

大　川　俊　隆

中国古算書研究会

大川　俊隆、小寺　裕、角谷　常子、田村　三郎

田村　誠、馬場　理恵子、張替　俊夫、矢崎　武人、吉村　昌之

Translation and Annotation of “The Nine Chapters on the Mathematical Art（九章算術）” Vol. 3

OHKAWA Toshitaka

Abstract

"The Nine Chapters on the Mathematical Art" was the oldest book of mathematics in China before the unearthing of "Suan-shu shu." The aim of our research is to provide a complete translation and annotation of it including annotations of Liu-Hui（劉徽）and Li Chunfeng（李淳風）from the viewpoint of our previous work on "Suan-shu shu."

This is the third article based on our research and results in which we studied the problems 31 and 32 of Chapter 1, Fangtian（方田）.

『九章算術』は『算数書』出土以前は数学書としては中国最古のものであった。我々は、我々の『算数書』研究を起点に、『九章算術』の劉徽注、李淳風注を含めた訳注を完成させることを目的としている。

---

† This work was partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) (20500879).

平成20年６月30日　原稿受理

大阪産業大学　教養部

本論文では、方田章の算題（31）および（32）に対する訳注を与える。

[三一]今有圓田、周三十歩、徑十歩[34]。問爲田幾何。荅曰、七十五歩[35][36]。
[三二]又有圓田、周一百八十一歩、徑六十歩三分歩之一[37]。問爲田幾何。荅曰、十一畝九十歩十二分歩之一[38][39]。
術曰、半周半徑相乘得積歩[40][41]。
又術曰、周徑相乘、四而一[42][43]。
又術曰、徑自相乘、三之、四而一[44][45]。
又術曰、周自相乘、十二而一[46][47]。

訓読：[三一] 今、円田有り、周三十歩、径十歩。問う、田を為すこと幾何ぞ。答えに曰う、七十五歩。
[三二]又、円田有り、周一百八十一歩、径六十歩三分歩の一。問う、田を為すこと幾何ぞ。答えに曰う、十一畝九十歩十二分歩の一。
術に曰う、周を半にし径を半にし相乗ずれば積歩を得。
又、術に曰う、周・径相乗じて、四にして一とす。
又、術に曰う、径自ら相乗じて、之を三し、四にして一とす。
又、術に曰う、周自ら相乗じて、十二にして一とす。

訳：[三一]今、円周30歩、直径10歩の円田がある。問う、田の面積は如何ほどか。答えにいう、75平方歩。
[三二] 又、円周181歩、直径$60\frac{1}{3}$歩の円田がある。問う、田の面積は如何ほどか。答えにいう、11畝$90\frac{1}{12}$平方歩。
術にいう、円周を半分にし、直径を半分にし、これらを掛け合わせると円の面積が得られる。
また、術にいう、円周と直径を掛け、４分の１にする。
また、術にいう、直径を自乗して、これを３倍し、４分の１にする。
また、術にいう、円周を自乗して、12分の１にする。

[34]**臣淳風等謹按、術意以周三徑一爲率、周三十歩、合徑十歩。今依密率、合徑九歩十一分歩之六。**
訓読：臣淳風等謹みて按ずるに、術の意は、周三・径一を以て率と為し、周三十歩は径十

歩に合す。今、密率[84]に依れば、（周三十歩は）径九歩十一分歩の六に合す。

注：（84）『隋書』律暦志上「備数」に「古之九数、円周率三、円径率一、其術疏舛。劉歆・張衡・劉徽・王蕃・皮延宗之徒、各設新率、未臻折衷。宋末、南徐州従事史祖冲之更開密法、以円径一億為一丈、円周盈数三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽。朒数三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽。正数在盈朒二限之間。密率円径一百一十三、円周三百五十五。約率円径七、円周二十二。・・・所著之書、名為綴術」と云う。ここで、李淳風が云う「密率」は、『隋書』律暦志上の云う「約率」である。以下の李注で用いられている率はすべて約率である。

訳：臣淳風等謹みて按じますに、この術の意は、円周３対直径１を率としているので、円周30歩だと、直径は10歩に見合う。今、密率によって計算すると、（円周30歩だと）直径は$9\frac{6}{11}$歩に見合う。

[35] **[劉注] 此於徽術、當爲田七十一歩一百五十七分歩之一百三。**

訓読：此れ徽の術[85]に於て、当に田七十一歩一百五十七分歩の一百三と為すべし。

注：（85）李籍云「徽術以五十乗周、一百五十七而一、即径。以一百五十七乗径、五十而一、即周。此率本於劉徽、故曰徽術」。劉徽は円周30歩ならば直径10歩ではないとしてこれを用いず、円周率を$\frac{157}{50}$、即ち3.14として、円周から円の面積を求めている。

訳：この場合、私の計算術によれば、（周30歩の）田の面積は$71\frac{103}{157}$平方歩となるはずである。

[36] **臣淳風等謹依密率、爲田七十一歩二十二分歩之一十三。**

訓読：臣淳風等謹みて密率に依れば、田七十一歩、二十二分歩の一十三と為す。

訳：臣淳風等謹みて密率に依って計算しますと、田の面積は$71\frac{13}{22}$平方歩となります。

[37] **臣淳風等謹按、周三徑一、周一百八十一歩、徑六十歩三分歩之一。依密率、徑五十七歩二十二分歩之十三。**

訓読：臣淳風等謹みて按ずるに、周三径一なれば、周一百八十一歩にして、径六十歩三分歩の一。密率に依れば、径五十七歩二十二分歩の十三。

訳：臣淳風等謹みて按じますに、円周３、直径１の比率では、円周181歩だと、直径は$60\frac{1}{3}$歩となる。密率によれば、（円周181歩だと）、直径は$57\frac{13}{22}$歩となります。

[38] **[劉注] 此於徽術、當爲田十畝二百八歩三百一十四分歩之一百一十三。**

訓読：此れ徽の術に於て、当に田十畝二百八歩三百一十四分歩の一百一十三と為すべし。

訳：この場合、私の計算術によれば、田の面積は10畝$208\frac{113}{314}$平方歩となるはずである。

[39]**臣淳風等謹依密率、爲田十畝二百五歩八十八分歩之八十七。**

訓読：臣淳風等謹みて密率に依れば、田十畝二百五歩八十八分歩の八十七と為す。

訳：臣淳風等謹みて密率に依って計算しますと、田の面積は10畝$205\frac{87}{88}$平方歩となります。

（以下の劉徽注は長いので、段落を区切って、各々に訓読・注・訳を加えてゆく）

[40]**[劉注]按、半周爲從、半徑爲廣。故廣從相乘爲積歩也。假令圓徑二尺。圓中容六（弧）〔觚〕[一]之一面、與圓徑之半、其數均等、（令）〔合〕[二]徑率一而觚周率三也。又按爲圖、以六觚之一面乘一弧半徑、（二因而六）〔三〕之[三]、得十二觚之冪。若又割之、次以十二觚之一面乘一弧半徑、（四因而）六之[四]、則得二十四觚之冪。割之彌細、所失彌少。割之又割、以至於不可割、則與圓周合體、而無所失矣。觚面之外、猶有餘徑。以面乘〔餘〕徑[五]、則冪出弧表。若夫觚之細者、與圓合體、則表無餘徑。表無餘徑、則冪不外出矣。以一面乘半徑、觚而裁之、毎輒自倍。故以半周乘半徑而爲圓冪。此以周・徑謂至然之數。非周三徑一之率也。周三者、從其六觚之環耳。以推圓規多少之覺、乃弓之與弦也。然世傳此法、莫肯精覈。學者踵古、習其謬失。不有明據、辯之斯難。凡物類形象、不圓則方。方圓之率、誠著於近、則雖遠可知也。由此言之、其用博矣。謹按（圓）〔圖〕[六]驗、更造密率。恐空設法、數昧而難譬。故置諸檢括、謹詳其記注焉。**

校訂：[一]「弧」を「觚」に改めるのは、戴震に始まる。以下の劉注に見える「弧」で、正多角形を意味するものは全て「觚」に改め、一々注記しない。

[二]郭書春云う、「令は合字の誤」と。

[三]郭書春云う、「聚珍版、四庫本案、「此句有訛舛。当云『三之』、上衍『二因而』三字」」と。今、この校訂に従う。

[四]郭書春云う、「聚珍版、四庫本案、「此句亦有訛舛。当云『六之』、上衍『四因而』三字」」と。今、この校訂に従う。

[五]郭書春云う、「銭校本は徑の上に餘字を補う」と。

[六]郭書春云う、「圓は圖字の誤」と。

訓読：按ずるに、半周を従（縦）と為し、半径を広と為す。故に広・従（縦）相乗じて積歩と為す也(86)。仮令に円径二尺とす。円中に六觚を容るるの一面(87)は、円径の半と其の数均等なれば(88)、径率一にして觚の周率三と合する也(89)。又、按じて図を為すに、

六觚の一面を以て一弧の半径に乗じ、之を三すれば、十二觚の冪を得[90]。若し又之を割り、次いで十二觚の一面を以て一弧の半径に乗じ、之を六すれば、則ち二十四觚の冪を得[91]。之を割ること弥々細なれば、失う所弥々少なし。之を割り又割りて、以て割るべからざるに至れば、則ち円周と合体して、失う所無し。觚の面の外、猶お余径有り。面を以て余径に乗ずれば、則ち冪は弧の表に出づ[92]。若し夫の觚の細なる者、円と合体すれば、則ち表に余径無し。表に余径無ければ、則ち冪は外出せず。一面を以て半径に乗じ、觚にして之を裁てば、毎に輒ち自ら倍す[93]。故に半周を以て半径に乗じて円の冪と為る。此れ周・径を以て至然の数と謂う[94]。周三・径一の率に非ざる也。周三なる者は、其の六觚の環に従うのみ。以て円規（と觚）の多少の覚（較）を推せば、乃ち弓と弦也[95]。然れども世々此の法を伝うるに、肯て精覈する莫し。学ぶ者古えを踵ぎ､其の謬失を習う。明拠有らざれば､之を弁ずること斯れ難し。凡そ物類の形象は、円ならざれば則ち方。方円の率、誠に近きに著かなれば、則ち遠しと雖も知るべき也。此れにより之を言えば､其の用や博し。謹んで図を按じて験し、更に密率を造る。空しく法を設くるのみなれば、数昧くして譬え難きを恐る。故に諸を検括に置き[96]、謹んで其の記注を詳しくす。

注：(86) 円の面積をSとすると、$S=\pi r^2=\pi r\times r$となる。πrは円の半周であり、rは半径であるので、円の面積を求めるにあたっても、縦（半周）×広（半径）の形式に従って説明している。

(87)「觚」は、飲酒に用いた酒器。『説文』巻四下角部に、「鄉飲酒之爵也」とある。細長く、上に開いた形で、下部は稜飾をほどこすものが多い。これより、文字を記す簡牘で、三稜、四稜、六稜、八稜のものを「觚」と呼ぶようになった。

劉徽は、「觚」の前に「六」「十二」「二十四」などの数字を付けて、正６角形、正12角形、正24角形などの意で用いる。ここで、劉徽が用いる「觚」の義が、正n角形の全体形を意味するのか、それとも正n角形の１辺と両半径でできる楔形（∇形）を意味するのかは明確でないが、我々は後者の意で解釈してゆく。

「一面」とは１辺のこと。「円中に六觚を容るるの一面」とは、円に内接する正６角形の１辺の意となる。

(88) 内接正６角形の１辺の長さが円の半径と等しいということ。

(89) 円の半径を１とすると、直径は２となり、正６角形６辺の合計は６となる。従って、直径と６辺の比率が１：３になる。以前はこれを円周率として用いていた。

(90) 図１のように、正６角形の１辺（ℓ_6）と円の半径（r）を掛けて、これを３倍すると、円に内接する正12角形の面積（S_{12}）となるということ。計算で示すと、

$$S_{12}=\frac{1}{2}\times \ell_6 \times r \times 6 = 3\times \ell_6 \times r$$

となる。

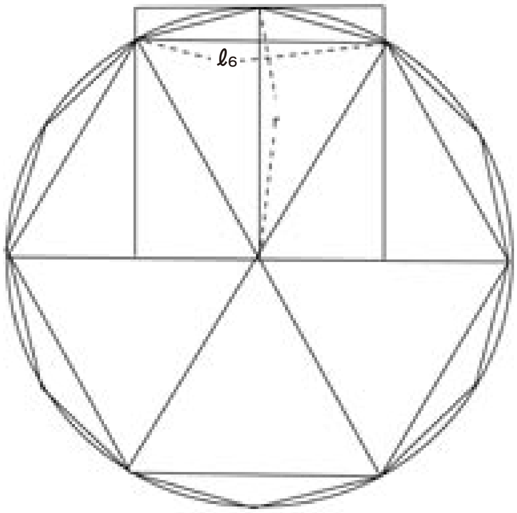


図 1

(91) 図２のように、正12角形の１辺 (ℓ_{12}) と円の半径 (r) を掛けて、これを６倍すると、円に内接する正24角形の面積 (S_{24}) となるということ。計算で示すと、

$$S_{24}=\frac{1}{2}\times \ell_{12} \times r \times 12 = 6\times \ell_{12} \times r$$

となる。

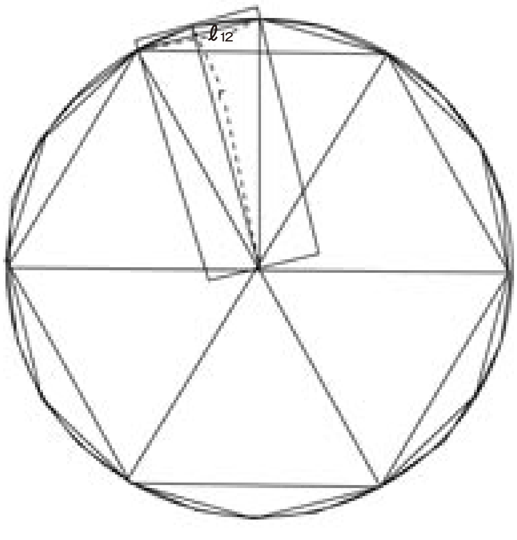


図 2

(92) 余径とは、図３のように、円径が正多角形の辺周を超えた部分のこと。これを正多角形の１辺に掛けると、図３のように、円弧の外に円の面積以外の余分な面積ができてしまうのを、「冪は弧の表に出づ」と言っている。

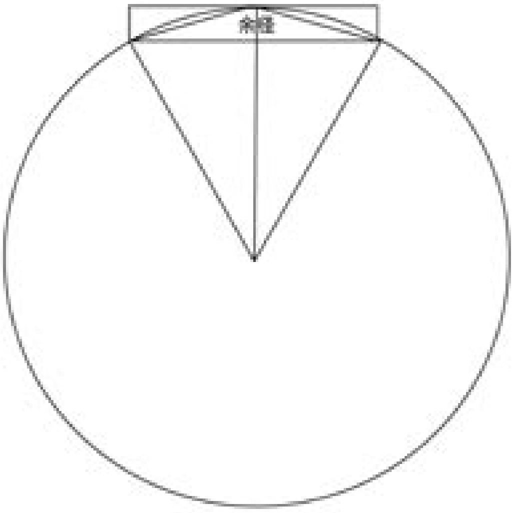


図３

(93)「一面を以て半径に乗じ、觚にして之を裁てば,毎に輒ち自ら倍す」を計算式で説明すると、「一面を以て半径に乗じ」とは、正n角形の１辺をℓ_nとすると、$\ell_n \times r$とすること。「觚にして之を裁てば」とは、正n角形のn個の楔形（∇）を裁つようにして正2n角形をつくれば、ということ。「毎に輒ち自ら倍す」とは、いつでもその度に面積は二倍になっているということ。即ち、$n \times \ell_n \times r = 2S_{2n}$という計算式になる。この式において、$\ell_n$を「細」にしてゆけば、$n \times \ell_n$は円周となるので、円周÷２×半径=円の面積となる。これがすぐ後ろの「故に半周を以て半径に乗ずれば円の冪と為る」ということである。

ここでも、上述したように、觚を正多角形そのものとはせず、正多角形の１辺と２つの半径でできる楔形（∇）として解した。

(94)「此れ周･径を以て至然の数と謂う」とは､「周･径」の後に「率」が省略されていて、「これより周･径で定まる率を至然の数と呼ぶのである」と云う意｡「至然の数」とは、円周率のことだが、具体的な整数の率の形で表すことができないので、このような表現になった。

(95)「円規」の「規」は、ぶんまわし、丸の義。よって、「円規」は同義の連文。「覚」は、「較」と通じ、ここでは差の義。後世でも「較」は差の義で用いられることが

ある。「円規」が弓に、正多角形の１辺が弓の弦に譬えられている。

(96)「検括」は、点検・概括すること。「撿括」とも書く。

『後漢書』辺譲伝「若処狐疑之論、定嫌審之分、経典交至、撿括参合、衆夫寂焉、莫之能奪也」。

「諸を検括に置く」とは、これを点検・概括の場に置くこと。

訳：案ずるに、円の場合は、半周を縦とし、半径を広とせよ。故に、(方田の面積と同様に)広・縦を互いに掛けると円の面積が出る。

今、仮に円の直径を２尺とする。円に内接する正６角形を考えるとその１辺は、円の直径の半分とその数値が等しいので、直径の比率１で正６角形の外周の比率３と合致する。また、図を作って考えると、正６角形の１辺をその半径に掛け、これを３倍すると、正12角形の面積が得られる。もし更に正６角形を割って（正12角形を作り)、次いでその正12角形の１辺をその半径に掛けて、これを６倍すると正24角形の面積が得られる。これを割ってますます細かくすると、失うところ(即ち、円と正多角形の差)がますます少なくなる。之を割り続けてゆき、もう割れないところにまで至れば、その正多角形は円周と合体し、失うところは無くなるのである。正多角形の１辺の外になお余径がある。１辺を余径に掛けると、その面積は弧の外表に出る。もし正多角形が細かくなって、円と合体すると、弧の外表に余径がなくなる。弧の外表に余径がなくなると、面積は外へ出なくなる。觚の１辺をその半径に乗じたものは、その觚の１辺を裁ってできる２つの觚の面積の、いつでも常に２倍になっている。故に半周を半径に掛けると円の面積となる。これで円周と直径の比率を「至然の数」と謂う。円周３、直径１の率ではない。円周３というのは、そのうちの正６角形の外周に従っているに過ぎない。そこで円弧と（この外周）がいかほどかという差を推しはかると、乃ち弓の弦に対する関係となるのである。しかし、世間ではこの法を伝えるに、精密に考証しようとはしなかった。学ぶ者も古えを継ぎその誤りを習った。明らかな証拠がなければ、これを弁じても難しいのである。凡そ物の形象は、円でなければ方である。方円の率が誠に近い処で顕かとなれば、遠きものといえども知ることができるのである。このことから方円の率を言えば、その用途は広い。そこで、図を案じて証明し、さらに密率を造ったのである。ただ、法（数値）を設けるだけでは、数値（の根拠）が不明で諭すに難しいのではなかろうか。そこで、これを点検・概括の場に置き、謹んでその注記を詳しくした次第である。

割六觚以爲十二觚術曰、置圓徑二尺、半之爲一尺、即圓裏觚之面也。令半徑一尺爲弦、半

面五寸爲句、爲之求股。以句冪二十五寸減弦冪、餘七十五寸。開方除之、下至秒忽。又一退法、求其微數。微數無名者以爲分子、以（下）〔十〕[一]爲分母、約作五分忽之二。故得股八寸六分六氂二秒五忽五分忽之二。以減半徑、餘一寸三分三氂九毫七秒四忽五分忽之三、謂之小句。觚之半面而又謂之小股、爲之求弦。其冪二千六百七十九億四千九百一十九萬三千四百四十五忽、餘分棄之。開方除之、即十二觚之一面也。

校訂：[一]郭書春云う、「下は十字の誤り」と。

訓読：六觚を割り以て十二觚と為すの術に曰う、円径二尺を置き、之を半にして一尺と為せば、則ち円裏の觚の面也。半径一尺をして弦と為し、半面五寸をして句と為さしめ、之を為して股を求む。句の冪二十五寸を以て弦の冪より減ずれば、余りは七十五寸。開方して之を除せば(97)、下は秒・忽に至る。又一たび法を退けて、其の微数を求む(98)。微数の名無き者は以て分子と為し、十を以て分母と為し、約して五分忽の二と作す。故に股八寸六分六氂二秒五忽五分忽の二を得。以て半径より減ずれば、余り一寸三分三氂九毫七秒四忽五分忽の三、之を小句と謂う。觚の半面にして又之を小股と謂い、之を為して弦を求む。其の冪、二千六百七十九億四千九百一十九万三千四百四十五忽、余りの分は之を棄つ。開方して之を除せば、即ち十二觚の一面也。

注：(97) 平方を開くには、除法を用いるので「之を除す」という。少広章の「開方術」参照。

(98) 開平方において、定方を一桁下げ、下一桁の方根を求めること。少広章の「開方術」参照。微数は小数のこと。

訳：正６角形を割り正12角形にする術にいう、円径を２尺とし、これを半分にして１尺となせば、これは円に内接する正６角形の１辺の長さになる。半径１尺を「弦」とし、１辺の半分５寸を「句」とし、「股」を求める（図４参照）。「句」の自乗25平方寸を「弦」の自乗（１尺×１尺=10寸×10寸=100平方寸）より引けば、余りは75平方寸。これを開平方し、下の桁が秒・忽の単位にまで至ると、さらにもう一度（定）法を一桁下げて、その小数を求める。小数でもう単位名が無いものは、それを分子とし、10を分母として、約分して$\frac{2}{5}$忽とする。故に「股」の長さ８寸６分６氂２秒5$\frac{2}{5}$忽が得られる。これを半径（１尺）より引けば、余りは１寸３分３氂９毫７秒4$\frac{3}{5}$忽となり、これを「小句」と謂う。正６角形の１辺の半分はまたこれを「小股」と謂い、これらより「弦」を求める。「弦」の自乗は、（「小句」の自乗と「小股」の自乗を併せて）、2679億4919万3445忽で、余りの分はこれを棄てる。これを開平方すると、正12角形の１辺の長さである。（その長さは、517638忽となる）。

図4

割十二觚以爲二十四觚術曰、亦令半徑爲弦、半面爲句、爲之求股。置上小弦冪、四而一、得六百六十九億八千七百二十九萬八千三百六十一忽、餘分棄之、即句冪也。以減弦冪、其餘開方除之、得股九寸六分五氂九毫二秒五忽五分忽之四。以減半徑、餘三分四氂七秒四忽五分忽之一、謂之小句。觚之半面又謂之小股。爲之求小弦。其冪六百八十一億四千八百三十四萬九千四百六十六忽、餘分棄之。開方除之、即二十四觚之一面也。

訓読： 十二觚を割り以て二十四觚と為すの術に曰う、亦半径をして弦と為し、半面をして句と為さしめ、之を為して股を求む。上の小弦の冪を置き、四にして一とすれば、六百六十九億八千七百二十九萬八千三百六十一忽を得、余りの分は之を棄つれば、即ち句の冪也。以て弦の冪より減じ、其の余りは開方して之を除せば、股九寸六分五釐九毫二秒五忽五分忽之四を得。以て半径より減ずれば、余りは三分四釐七秒四忽五分忽之一、之を小句と謂う。觚の半面又之を小股と謂う。之を為して小弦を求む。其の冪、六百八十一億四千八百三十四万九千四百六十六忽、余りの分は之を棄つ。開方して之を除せば、即ち二十四觚の一面也。

訳： 正12角形を割り正24角形にする術にいう、また半径を「弦」とし、1辺を半分にしたものを「句」として、これより「股」を求める。上の「小弦」の自乗（2679億4919万3445忽）を置いて、これを4で割ると、669億8729万8361忽が得られ、余りの分はこれを棄てると、それが「句」の自乗である。これを「弦」の自乗から引き、その余りを開平方すると、「股」の長さ9寸6分5釐9毫2秒5$\frac{4}{5}$忽が得られる。これを半径か

ら引くと、余りは３分４釐７秒$4\frac{1}{5}$忽となり、これを「小句」と謂う。正12角形の１辺の半分をまた「小股」と謂い、これらより「小弦」を求める。「小弦」の自乗は681億4834万9466忽で、余りの分はこれを棄てる。これを開平方すると、正24角形の１辺の長さである。（その長さは、261052.4忽となる）。

割二十四觚以爲四十八觚術曰、亦令半徑爲弦、半面爲句、爲之求股。置上小弦冪、四而一、得一百七十億三千七百八萬七千三百六十六忽、餘分棄之、即句冪也。以減弦冪、其餘開方除之、得股九寸九分一氂四毫四秒四忽五分忽之四。以減半徑、餘八氂五毫五秒五忽五分忽之一、謂之小句。觚之半面又謂之小股。爲之求小弦。其冪一百七十一億一千二十七萬八千八百一十三忽、餘分棄之。開方除之、得小弦一寸三分八毫六忽、餘分棄之、即四十八觚之一面。以半徑一尺乘之、又以二十四乘之、得冪三萬一千三百九十三億四千四百萬忽。以百億除之、得冪三百一十三寸六百二十五分寸之五百八十四、即九十六觚之冪也。

訓読：二十四觚を割り以て四十八觚と為すの術に曰う、亦半径をして弦と為し、半面をして句と為さしめ、之を為して股を求む。上の小弦の冪を置き、四にして一とすれば、一百七十億三千七百八万七千三百六十六忽を得、余りの分は之を棄つれば、即ち句の冪也。以て弦の冪より減じ、其の余りは開方して之を除すれば、股九寸九分一釐四毫四秒四忽五分忽の四を得。以て半径より減ずれば、余りは八釐五毫五秒五忽五分忽の一、之を小句と謂う。觚の半面又之を小股と謂う。之を為して小弦を求む。その冪、一百七十一億一千二十七万八千八百一十三忽、余りの分は之を棄つ。開方して之を除せば、小弦一寸三分八毫六忽を得、余りの分は之を棄つれば、即ち四十八觚の一面也。半径一尺を以て之に乗じ、又二十四を以て之に乗ずれば、冪三万一千三百九十三億四千四百万忽を得。百億を以て之を除せば、冪三百一十三寸六百二十五分寸の五百八十四を得、即ち九十六觚の冪也。

訳：正24角形を割り正48角形にする術にいう、また半径を「弦」とし、１辺を半分にしたものを「句」として、これより「股」を求める。上の「小弦」の自乗（681億4834万9466忽）を置いて、これを４で割ると、170億3708万7366忽が得られ、余りの分はこれを棄てると、それが「句」の自乗である。これを「弦」の自乗から引き、その余りを開平方すると、「股」の長さ９寸９分１釐４毫４秒$4\frac{4}{5}$忽が得られる。これを半径から引くと、余りは８釐５毫５秒$5\frac{1}{5}$忽となり、これを「小句」と謂う。正24角形の１辺の半分をまた「小股」と謂い、これらより「小弦」を求める。「小弦」の自乗は171億1027万8813忽で、余りの分はこれを棄てる。これを開平方すると、「小弦」１寸３分８毫６忽が得られ、余りの分数はこれを棄てると、それが正48角形の１辺の長さで

ある。

半径１尺をこれに掛け、さらに24をこれに掛けると、冪（面積）３兆1393億4400万忽が得られる。これを100億で割ると、面積313$\frac{584}{625}$平方寸が得られ、これが正96角形の面積である。

割四十八觚以爲九十六觚術曰、亦令半徑爲弦、半面爲句、爲之求股。置次上弦冪[一]、四而一、得四十二億七千七百五十六萬九千七百三忽、餘分棄之、則句冪也。以減弦冪、其餘開方除之、得股九寸九分七氂八毫五秒八忽十分忽之九。以減半徑、餘二氂一毫四秒一忽十分忽之一、謂之小句。觚之半面又謂之小股、爲之求小弦。其冪四十二億八千二百一十五萬四千一十二忽、餘分棄之。開方除之、得小弦六分五氂四毫三秒八忽、餘分棄之、即九十六觚之一面。以半徑一尺乘之、又以四十八乘之、得冪三萬一千四百一十億二千四百萬忽。以百億除之、得冪三百一十四寸六百二十五分寸之六十四、即一百九十二觚之冪也。

校訂：[一]ここは、すぐ上の「割二十四觚以爲四十八觚術」にならって「置上小弦冪」とすべきである。訓読・訳はこれに基づいて行う。

訓読：四十八觚を割り以て九十六觚と為すの術に曰う、亦半径をして弦と為し、半面をして句と為さしめ、之を為して股を求む。上の小弦の冪を置き、四にして一とすれば、四十二億七千七百五十六万九千七百三忽を得、余りの分は之を棄つれば、則ち句の冪也。以て弦の冪より減じ、其の余りは開方して之を除せば、股九寸九分七釐八毫五秒八忽十分忽の九を得。以て半径より減ずれば、余りは二釐一毫四秒一忽十分忽の一、之を小句と謂う。觚の半面又之を小股と謂う。之を為して小弦を求む。其の冪、四十二億八千二百一十五万四千一十二忽、余りの分は之を棄つ。開方して之を除せば、小弦六分五釐四毫三秒八忽を得、余りの分は之を棄つれば、即ち九十六觚の一面なり。半径一尺を以て之に乗じ、又四十八を以て之に乗ずれば、冪三萬一千四百一十億二千四百万忽を得。百億を以て之を除せば、冪三百一十四寸六百二十五分寸の六十四を得、即ち一百九十二觚の冪也。

訳：正48角形を割り正96角形にする術にいう、また半径を「弦」とし、１辺を半分にしたものを「句」として、これより「股」を求める。上の「小弦」の自乗（171億1027万8813忽）を置いて、これを４で割ると、42億7756万9703忽が得られ、余りの分はこれを棄てると、それが「句」の自乗である。これを「弦」の自乗から引き、その余りを開平方すると、「股」の長さ９寸９分７釐８毫５秒８$\frac{9}{10}$忽が得られる。これを半径から引くと、余りは２釐１毫４秒1$\frac{1}{10}$忽となり、これを「小句」と謂う。正48角形の１辺の半分をまた「小股」と謂い、これらより「小弦」を求める。「小弦」の自乗は42

億8215万4012忽で、余りの分はこれを棄てる。これを開平方すると、「小弦」６分５氂４毫３秒８忽が得られ、余りの分はこれを棄てると、それが正96角形の１辺の長さである。

半径１尺をこれに掛け、さらに48をこれに掛けると、冪（面積）３兆1410億2400万忽が得られる。これを100億で割ると、面積$314\frac{64}{625}$平方寸が得られ、これが正192角形の面積である。

以九十六觚之冪減之、餘六百二十五分寸之一百五、謂之差冪。倍之、爲分寸之二百一十、即九十六觚之外弧田九十六、所[一]謂以弦乘矢之凡冪也。加此冪於九十六觚之冪、得三百一十四寸六百二十五分寸之一百六十九、則出圓之表矣。故還就一百九十二觚之全冪三百一十四寸以爲圓冪之定率、而棄其餘分。

校訂：[一]郭書春は「所」を上句の後ろにつけ､「九十六所」とするが､ここは「所謂」として､「いわゆる」の義とする。

訓読：九十六觚の冪を以て之より減ずれば、余りは六百二十五分寸の一百五、之を差冪と謂う。之を倍し、（六百二十五）分寸の二百一十と為し、即ち九十六觚の外弧の田九十六にして(99)、いわゆる弦を以て矢に乗ずるの凡冪也(100)。此の冪を九十六觚の冪に加うれば､三百一十四寸六百二十五分寸の一百六十九を得て､則ち円の表に出づ(101)。故に還りて一百九十二觚の全冪三百一十四寸に就き、以て円冪の定率と為し、而してその余りの分を棄つ(102)。

注：(99)「差冪」とは面積の差の意。計算上は、$S_{192}-S_{96}$となる（以降、これをT_{192}と表記する）｡「之を倍し」とは､計算上は$2T_{192} = 2(S_{192}-S_{96}) = \frac{210}{625}$となる｡これは､注(91)(92)で述べたように、正96角形の１辺と余径を掛けてできる長方形の面積の96個分となる。「分寸の二百一十」は、すぐ上に「六百二十五分寸の一百五」があるので、「六百二十五」が省略されている。古代の分数の書き方である。14)『算数書』**【26】**并租題参照。

(100) ここでは、「弦」は正96角形の１辺を指し、「矢」は余径を指す。「凡冪」は面積の総和の意で、「弦を以て矢に乗ずるの凡冪」とは、正96角形の１辺と余径を掛けてできる長方形96箇分の面積の総和となる、との意である。川原氏は、この句を36「弧田術」のことを説明するものとするが無理なよう。

(101) ここの内容は$S_{192} = S_{96}+T_{192} < S < S_{96}+2T_{192} = S_{192}+T_{192}$を意味している。正192角形の面積$314\frac{64}{625}$平方寸と差冪$\frac{105}{625}$平方寸の和は円の面積より大きくなる。そこで、劉徽がすぐ下で述べるように正192角形の面積の整数部分314平方寸を取って円の

面積とし、併せて残った分数部分$\frac{64}{625}$は棄てるのである。

(102) 正96角形においては、$S_{96}=313\frac{584}{625}<S$であるため、Sの下限として314を取ることはできなかったが、正192角形においては、$S_{192}=314\frac{64}{625}<S<S_{192}+T_{192}=314\frac{169}{625}$となったため、Sの下限として314を取ることに決したのである。

訳：正96角形の面積をこれ（正192角形の面積、即ち$314\frac{64}{625}$平方寸）から引くと、余りは$\frac{105}{625}$平方寸となり、これを「差冪」と謂う。これを2倍して$\frac{210}{625}$平方寸とすると、即ちこれが正96角形の外弧の田96個分であって、所謂「弦を以て矢に乗じて」できる長方形96個全体の面積である。この面積を正96角形の面積に加えると、$314\frac{169}{625}$平方寸が得られるが、これでは円の外に出てしまう。ゆえに、元に戻って正192角形の面積の整数部分314平方寸をもって、これを円の面積の定率とし、その余りの分数は棄てるのである。

以半徑一尺除圓冪、倍所得、六尺二寸八分、即周數。令徑自乘爲方冪四百寸、與圓冪相折、圓冪得一百五十七爲率、方冪得二百爲率。方冪二百、其中容圓冪一百五十七也。圓率猶爲微少。按弧田圖、（合）〔令〕[一]方中容圓、圓中容方、内方合外方之半。然則圓冪一百五十七、其中容方冪（二）〔一〕[二]百也。又（合）〔令〕徑二尺與周六尺二寸八分相約、周得一百五十七、徑得五十、則其相與之率也。周率猶爲微少也。

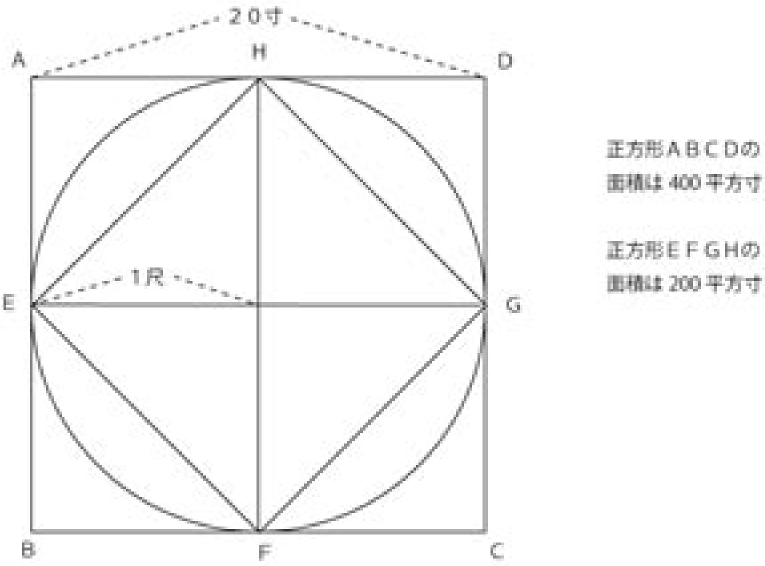
校訂：[一]郭書春云う、「合は令字の誤り」と。

[二]郭書春云う、「二は一字の誤り」と。

訓読：半径一尺を以て円冪を除し、得る所を倍すれば、六尺二寸八分、即ち周数なり。径をして自乗し方冪四百寸と為さしめ、円冪と相折れば、円冪は一百五十七を得て率と為し、方冪は二百を得て率と為す。方冪二百、其の中に円冪一百五十七を容るる也。円率猶お微少と為す(103)。弧田の図を按ずるに、方中に円を容れ、円中に方を容れしむれば、内方は外方の半に合す。然らば則ち円冪一百五十七、其の中に方冪一百を容るる也。又径二尺と周六尺二寸八分とを相約せしめ、周一百五十七を得、径五十を得れば、則ち其の相与の率也。周率猶お微少と為す也。

注：(103) 劉徽は正192角形の面積を$314\frac{64}{625}$平方寸とし、さらに「而してその余りの分を棄つ」と云うように、$\frac{64}{625}$平方寸を切り捨てているので、その円周率はやや小さいものとなっているということ。

(104) 下の「弧田の図」は図5を参照。



弧田の図

図5

訳：半径１尺で円の面積を割り、得た値を２倍すると６尺２寸８分となる。これが円周の数である。直径を自乗して正方形の面積400平方寸とし、円の面積と互いに約すると、円の面積は157が得られて率となり、正方形は200が得られて率となる。面積200の正方形は、その中に面積157の円を内接させる。円率の方がなおわずかに小さい。弧田の図を案じるに、正方形の中に円を内接させ、さらにその円に正方形を内接させると、中の正方形は外の正方形の半分になる。そうすると、面積157の円は、その中に面積100の正方形を内接させることになる。また、直径２尺と円周６尺２寸８分を互いに約すると、円周は157が得られ、直径は50が得られ、これが相与の率である。この場合も、周率の方がなおわずかに小さい。

晉武庫中漢時王莽作銅斛、其銘曰、律嘉量斛、内方尺而圓其外。庣旁九氂五毫、冪一百六十二寸、深一尺、積一千六百二十寸、容十斗。以此術求之、得冪一百六十一寸有奇。其數相近矣。此術微少。而（斛）〔觚〕差冪六百二十五分寸之一百五。以十二觚之〔差〕冪爲率[一]**、以率消息、當取此分寸之三十六、以增於一百九十二觚之冪、以爲圓冪三百一十四寸二十五分寸之四。置徑自乘之、方冪四百寸、令與圓冪通相約、圓冪三千九百二十七、方冪得五千。是爲率、方冪五千中容圓冪三千九百二十七、圓冪三千九百二十七中容方冪二千五百也。以半徑一尺除圓冪三百一十四寸二十五分寸之四、倍**

所得、六尺二寸八分二十五分（寸）[分]之八、即周數也。全徑二尺與周數通相約、徑得一千二百五十、周得三千九百二十七、即其相與之率。若此者、蓋盡其纖微矣。舉而用之、上法爲約耳。當求一千五百三十六觚之一面、得三千七十二觚之冪。而裁其微分、數亦宜然、重其驗耳。

校訂：[一]郭書春は「十二觚」の前に「一百九」を入れるが、無くても通じる。また、「冪」の前に「差」を入れて、「十二觚の差冪を以て率と為す」と解釈した。

訓読：晋の武庫中に漢時の王莽の作る銅斛あり、其の銘に曰う、「律の嘉量の斛、方尺にして其の外を円にす。旁を庣(す)ぐること九釐五毫、冪一百六十二寸、深さ一尺、積一千六百二十寸、容は十斗」(105)と。此の術を以て之を求むれば、冪一百六十一寸有奇を得(106)。其の数相近し。此の術微や少し(107)。而るに觚の差冪六百二十五分寸の一百五(108)。十二觚の差冪を以て率と為し(109)、率を以て消息すれば、当に此の（六百二十五）分寸の三十六を取り、以て一百九十二觚の冪に増して以て円冪三百一十四寸二十五分寸の四と為すべし(110)。径を置きて之を自乗すれば方冪は四百寸、円冪と通じて相約せしむれば、円冪は三千九百二十七、方冪は五千を得。是を率と為せば、方冪五千の中に円冪三千九百二十七を容れ、円冪三千九百二十七の中に方冪二千五百を容るる也(111)。半径一尺を以て円冪三百一十四寸二十五分寸之四を除し、得る所を倍して六尺二寸八分二十五分分の八(112)、即ち周数也。全径二尺、周数と通じて相約すれば、径は一千二百五十を得、周は三千九百二十七を得。即ち其の相与の率なり。此の若き者は、盖しその纖微を尽くす。挙げて之を用うれば、上の法を約と為すのみ。当に一千五百三十六觚の一面を求め、三千七十二觚の冪を得べし。その微分を裁てば、数も亦宜しく然るべく、其の験を重ぬるのみ(113)。

注：(105) この銅斛は、その拓本と釈文がいくつかの金石集に収められているが、国家計量総局主編『中国古代度量衡図集』（文物出版社、1981年）の126に写真と銘文の拓本が載る。拓本では、劉注に引用される文中の「圓」「釐」「毫」が各々「圜」「氂」「豪」に作られている。また、「内方尺而圓其外」の「内」の字は、拓本には見えない。なお、この銅斛の銘文は、商功章28の劉注でも引用されている。

なお『晋書』律暦志上に二度「魏景元四年（263年）劉徽注九章云」として劉注が引用されている。これが劉徽注の成立を魏代とする根拠である。しかし、ここで劉徽自らが「晋の武庫」と云っているのだから、劉徽注の成立を晋朝成立（魏の咸熙二年、晋の泰始元年、265年）以降と考えることもできる。また、「晋の武庫」に関する記録は『晋書』の中にしばしば見える。その中「五行志上」の一例に、

恵帝元康五年閏月庚寅、武庫火。張華疑有乱、先命固守、然後救火。是以累

代異宝、王莽頭、孔子屐、漢高祖断白蛇剣及二百万人器械、一時蕩尽。是後愍懐太子見殺之罰也。

とある。元康五年は295年。よって、265-295年の30年間に劉徽は晋の武庫を見ることができた。

(106) 図6から分かるように、この円の直径は、$\sqrt{2}+2\times0.0095=1.4332$尺であるので、半径は、7.166寸となる。劉徽の円周率3.14で円の面積を求めると、$7.166^2\times3.14=161.2$平方寸となる。銘の云う面積は162平方寸なので、0.8平方寸の差である。「冪一百六十一寸有奇」は、161.2平方寸のことで、この「奇」は、『音義』に「余数也」と云う。

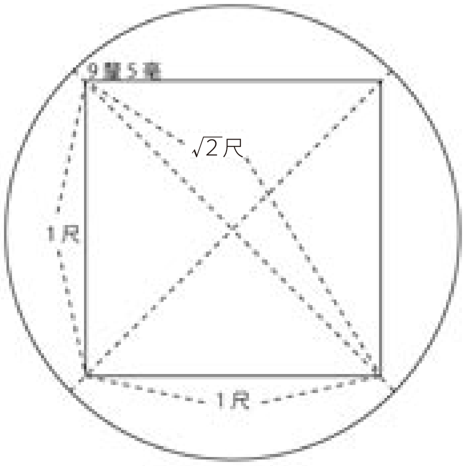


図6

(107)「此の術微や少し」とは劉徽の率3.14には切り捨てがあるので、あるべき率よりやや小さい、との意。

(108)「而るに」とは前注 (107) を受けて精密な近似値を求めようとするための心がまえであろう。正192角形と正96角形の面積を各々S_{192}、S_{96}とすると、差冪は$S_{192}-S_{96}=314\frac{64}{625}-313\frac{584}{625}=\frac{105}{625}$となるということ。

(109)「十二觚の（差）冪を以って率と為し」というのは、差冪T_{12}からはじめて、T_{192}、T_{384}以降を求めることを意味する。そのため「差冪の率」を考えることを述べているのであろう。

$\frac{T_{24}}{T_{12}}, \frac{T_{48}}{T_{24}}, \frac{T_{96}}{T_{48}}, \frac{T_{192}}{T_{96}}, \frac{T_{384}}{T_{192}}, \cdots$

これらの率の値は$\frac{1}{4}$より大きく、次第に減少することを劉徽は認識していたと考

えられる。劉徽は、T_{192}までは既知であるので、以下の文では、差冪の率$\frac{T_{384}}{T_{192}}$から始めている。

$$\frac{1}{4} < \frac{T_{384}}{T_{192}} = \frac{(S_{384}-S_{192})}{T_{192}} < \rho$$

このρは$\frac{T_{48}}{T_{24}} = 0.25324$より小さい。これを使うと

$$\frac{T_{192}}{4} < T_{384} = S_{384} - S_{192} < \rho T_{192} \qquad ①$$

$$S_{192} + \frac{T_{192}}{4} < S_{384} < S_{192} + \rho T_{192}$$

となる。ところで、S_{192}およびT_{192}は既知であるので、S_{384}の限界を求めることができる。続いて

$$\frac{T_{192}}{4^2} < \frac{T_{384}}{4} < T_{768} = S_{768} - S_{384} < \rho T_{384} < \rho^2 T_{192} \qquad ②$$

$$\frac{T_{192}}{4^3} < \frac{T_{768}}{4} < T_{1536} = S_{1536} - S_{768} < \rho T_{768} < \rho^3 T_{192} \qquad ③$$

……………

十分に大きいmに対して$N=192\times 2^m$までを考える。①、②、③、…を順次加え、各辺にS_{192}を足すと

$$S_{192}+\left(\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4^m}\right) T_{192} < S_N < S_{192}+(\rho+\cdots+\rho^m)\, T_{192}$$

mを大きくすると、左辺の級数は$\frac{1}{3}$に、右辺の級数は$\frac{\rho}{1-\rho}$に近づいていく。ここで、$\frac{T_{48}}{T_{24}} = 0.25324$より大きい値$\rho = \frac{12}{47}$（$= 0.255319$）とすると、

$$314\frac{64}{625} + \frac{1}{3}\times\frac{105}{625} \leqq S \leqq 314\frac{64}{625} + \frac{12}{35}\times\frac{105}{625}$$

$$314\frac{99}{625} \leqq S \leqq 314\frac{64}{625} + \frac{36}{625} = 314\frac{4}{25}$$

が得られる。この計算過程が「率を以て消息す」であって、「当に此の（六百二十五）分寸の三十六を取り、以て一百九十二觚の冪に増して以て円冪三百一十四（平方）寸二十五分寸の四と為すべし」の根拠が示されたことになる。

(110)「消息」は、「消長」「増減」の意。『易』豊卦に、

「日中則昃、月盈則食。天地盈虚、与時消息。而況於人乎、況於鬼神乎」高亨注「消息猶消長」。

$S_{192} - S_{96} = \frac{105}{625}$より$\frac{36}{625}$という数値が出てくる過程については、現在３氏の説がある。

①三上義夫の説：S_{24}よりS_{192}まで差冪はほぼ$\frac{1}{4}$の割合で縮小するので、「消息」を無限等比級数の和と考えると、正192角形より後の差冪の総和は、

$$\frac{105}{625}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots\right) = \frac{35}{625}$$

に収束する。この値を劉徽は、$\frac{36}{625}$と変え、これをS_{192}の面積に加えると、円の面積となる。即ち、$S = 314\frac{64}{625}+\frac{36}{625} = 314\frac{4}{25}$となる。

②川原秀城の説：「内接正十二角形の面積を基点として、つぎつぎに差冪を加えていくと」と訳し、注で三上説を紹介した後「だが、「消息」の用法として有

限個の差率の合計を示すことがあり（『唐書』暦書）、かつこの段の最後に「正三千七十二角形の面積」などとあるから、ただ割円法を有限回繰り返すことによって「差冪」を加えていき、面積を求めることと解釈しておく」という。

③李継閔の説：

$S_{24}-S_{12}:S_{192}-S_{24}=S_{192}-S_{96}:S-S_{192}$の比例近似が成り立つと仮定して、これに、$S_{24}-S_{12}=10.5$、$S_{192}-S_{24}=3.6$、$S_{192}-S_{96}=\frac{105}{625}$の値を代入して、$S-S_{192}=\frac{36}{625}$とし、これより、$S=S_{192}+\frac{36}{625}=314\frac{4}{25}$とする。

（111）図５から分かるように、正方形とそれに内接する円とその円に内接する正方形の面積比率は、$400:314\frac{4}{25}:200=5000:3927:2500$となる。

（112）円周は、$\frac{\pi r^2}{r}\times 2$だから、$314\frac{4}{25}$平方寸$\div 10\times 2=62.8\frac{4}{125}$寸となり、これを分単位で表すと、$628\frac{40}{125}$分、即ち$628\frac{8}{25}$分となる。よって、この計算より、原文「六尺二寸八分、二十五分寸之八」は「六尺二寸八分、二十五分分之八」とすべきである。

（113）劉徽は、正192角形の面積S_{192}を求めたときと同じように、正n角形の１辺ℓ_nを求めて正2n角形の面積S_{2n}を求めていったのであろう。

$\ell_{2n}{}^2=2-\sqrt{4-\ell_n{}^2}$,　$S_{2n}=\frac{n\ell_n}{2}$,　$\ell_6=1$

を用いて、ℓ_k、S_kを求めると、

k	$\ell_{2k}{}^2$	ℓ_k	S_k	T_k	S_k+T_k
384	0.00026772417	0.016362278			
768	0.00006693217	0.008181208346	3.141557544	0.000105141	3.141662685
1536	0.00001673312	0.004090613646	3.141584055	0.000026461	3.141610466
3072			3.14159128	0.000007275	3.141598555

この表を見ると$k=1536$のときは$S<3.141610466$であるが、$k=3072$とすると、$3.14159128<S<3.141598555$となるので、小さい近似値3.14を求めたのと同じ根拠から大きい近似値3.1416を得ている。これは上の差冪の率を用いて得た$314\frac{4}{25}$と一致する。

訳：晋の武庫の中に、漢代に王莽が造った銅斛があり、その銘文に「律の嘉量の斛、方一尺にして其の外を円にす。旁を庣（す）ぐること九氂五毫、冪一百六十二（平方）寸、深さ一尺、積一千六百二十（立方）寸、容は十斗」と云う。私のこの術の値で計算すると、面積161余平方寸となり、二つの数値は近い。私の術の値はやや小さい。

しかし、（正192角形と正96角形の）「差冪」が$\frac{105}{625}$寸で、正12角形の面積を率とし、率をもって増減すると、$\frac{36}{625}$寸を取ることとなり、これを正192角形の面積に加えて円の

面積$31\frac{4}{25}$平方寸とすべきであろう。

直径を自乗してできる正方形の面積は400平方寸であり、円の面積と通分して約すると、円の面積は3927、正方形の面積は5000となる。これを率とすると、正方形5000の中に円3927が内接し、円3927の中に正方形2500が内接する。さらに、半径１尺（10寸）で、円の面積$314\frac{4}{25}$平方寸を割り、これを２倍すると６尺２寸８分と$\frac{8}{25}$分が得られ、これが周数である。円の直径２尺を周数と通分して約すると、直径は1250、円周は3927が得られる。これが直径と円周の相与率となる。このような数字は繊微を尽くしたものだが、その数値（の桁数を深く考え）すべて用いるとなると、上述の法の数値はおおよその数値ということになる。

正1536角形の１辺を求めると、正3072角形の面積（3.14159平方寸）を得ることができる。その微細な部分を切り捨てれば、その数値も、（上で求めた、円の面積$314\frac{4}{25}$平方寸と）まさに合致することになり、私の数値の証明をさらに重ねるものである。

[41]**臣淳風等謹按、舊術求圓、皆以周三徑一爲率。若用之求圓周之數、則周少徑多。用之求其六觚之田、乃與此率合會耳。何則、假令六觚之田、觚間各一尺爲面、自然從角至角、其徑（一）〔二〕[一]尺可知。此則周六徑二、與周三徑一已合。恐此猶以難曉、今更引物爲喩。設令刻物作圭形者六枚、枚別三面、皆長一尺。攢此六物、悉使鋭頭向裏、則成六觚之周、角徑亦皆二尺。更從觚角外畔圍繞爲規、則六觚之徑盡達規矣。當面徑短、不至外規。若以徑言之、則爲規六尺、徑二尺、面徑皆一尺。面徑股不至外畔、定無二尺可知。故周三徑一之率於圓周乃是徑多周少。徑一周三、理非精密。蓋術從簡要、舉大綱略而言之。劉徽將以爲疏、遂乃改張其率。但周徑相乘、數難契合。徽雖出斯二法、終不能究其纖毫也。祖冲之以其不精、就中更推其數。今者修撰、擿摭諸家、考其是非、冲之爲密。故顯之於徽術之下、冀學者之所裁焉。**

校訂：[一]郭書春云う、「一は二字の誤り」と。

訓読：臣淳風等謹みて按ずるに、旧術の円を求むるに、皆周三・径一を以て率と為す。若し之を用いて円周の数を求むれば、則ち周少なくして径多し。之を用いてその六觚の田を求むれば、乃ち此の率と合会するのみ。何となれば則ち、仮令に六觚の田、觚の間各々一尺を面と為せば、自然にして角より角に至る、その径二尺たること知るべし。此れ則ち周六・径二、周三・径一と已に合す。恐らくは此れ猶お暁(さと)り難きを以て、今更に物を引きて喩えと為さん。設し物を刻み圭形を作らしむる者六枚、枚ごとに三面を別にし、皆長さ一尺たり。此の六物を攢(あつ)め悉く鋭頭をして裏(うち)に向かわしむれば、則ち六觚の周を成し、角径も亦皆一尺たり(114)。更に觚角の外畔より囲繞して規を為

せば[115]、則ち六觚の径は尽く規に達す。面に当たるの径は短く、外規に至らず[116]。若し径を以て之を言えば、則ち規六尺・径二尺・面径皆一尺と為す。面径の股[117]外畔に至らざれば、定めて二尺無きこと知るべし[118]。故に周三・径一の率は、円周においては乃ち是径多くして周少なし。径一・周三は理として精密に非ず。蓋し術は簡要に従い、大綱を挙げて略して之を言う。劉徽将て以(もっ)為(おもえら)く、疎なりと。遂に乃ち其の率を改張す。但だ周径相乗ずるも[119]、数契合し難し。徽斯の二法を出だす[120]と雖も、終に其の繊毫を究むる能わざる也。祖冲之[121]其の精ならざるを以て、なかんずく更に其の数を推す。今者、修撰するに諸家を捃摭(くんせき)し[122]、其の是非を考え、沖之を密と為す。故に之を徽の術の下に顕かにし、学ぶ者の裁つところを冀う。

注：(114) ここでいう「角径」は、角と角の距離、すなわち1辺の長さをいう。

(115)「外畔」は、円周の縁辺。本章「弧田」「術曰」の劉注に「今觚面不至外畔、失之於少」とある。規は丸の義。注 (95) 参照。「規を為す」とは、正6角形の頂角を通るように円周を描くこと。

(116)「面に当たるの径」とは、正6角形の向かい合う面（辺）と面との最短距離のこと。それが短いとは、正6角形の直径より短いこと。「外規に至らず」とは、向かい合う辺と辺の距離では円周まで達しないこと。

(117) 正6角形において、図7のように、直角三角形を考え、正6角形の1辺（面径）を句とした時、この直角三角形で股に当たる辺を「面径の股」と称している。上の「面に当たるの径」と同じ長さになる。

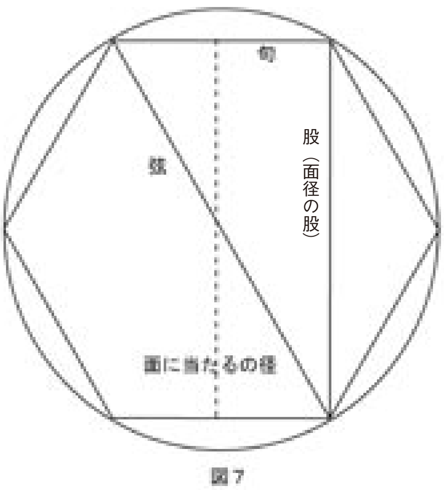


図7

(118) 上の注 (117) の直角三角形において、弦（直径）が2尺なのだから、股はそれ

より短くなる、ということ。

(119)「周径相乗ず」とは術曰の「半周半徑相乘得積步」を基にして述べたものである。

(120)「劉徽の二法」とは、注(101)(110)参照。円周率として3.14と3.1416を提示したことを指す。

(121)祖冲之の伝は、『南斉書』巻53文学伝と『南史』巻73文学伝に載る。永元2年(500)72歳で卒す。劉宋・蕭斉の時代を生きた科学者。彼の考案した密率については、(84)参照。

(122)「捃摭」は、拾うこと。『漢書』刑法志「於是相国蕭何捃摭秦法、取其宜於時者、作律九章」顔師古云「捃摭、謂収拾也。捃音九問反。摭音之石反」。

訳：臣淳風等謹みて按じますに、旧術で円を求める場合は、皆円周3・直径1を率としていた。もしこれを用いて円周を求めると、円周は小さく直径は大きくなる。これを用いて内接正6角形の田の周の値を求めると、この旧術の率と合致するのである。なんとなれば、仮に正6角形を、頂角と頂角の間を各々 1尺にして1辺とすると、自ずからある角よりその対角までの直径が2尺になることが分かるであろう。これが即ち、正6角形における「円周6・直径2」であり、旧術の「円周3・直径1」の率と結果的に合致する。

恐らくはこれではなお理解しにくいであろうから、今、更に物を引用して喩えとしよう。仮に物を刻んで圭の形の物6枚を作り、各々の圭は3辺にし、すべての辺長を1尺とする。(即ち、1辺が1尺の正三角形とする)。これらの6個を圭の頂角がすべて内側に向かうように集めると、正6角形の辺周となり、「角径」(辺の長さ)も皆1尺となる。更に6角形の角の縁辺より取り囲むように円を画くと、正6角形の3つの直径はすべて円に達することになる。その面に当たる径(向かい合う辺と辺との最短距離)は、短くてその外接円にまで達していない。

もし「径」をもって言えば、円周は6尺、径は2尺、面径(辺の長さ)は皆1尺となる。よって、面径の股は外畔(外接円)にまで届かず、必ずや2尺に足りないことが知られる。ゆえに「円周3・直径1」の率は、円周としては、径が多くて周が少ないことになる。「直径1・円周3」は、理としては精密ではないのである。蓋し、術は簡単で要を得ていなければならず、よって旧術の率はその概要を挙げて之を述べたのである。

劉徽はなおこれを疏略であると考え、遂にその率を改めた。しかし、周と径を乗じてみても、数字は噛み合い難い。劉徽は円周率の2法を提起したが、ついにその糸毫の差もないところまでは究めることはできなかった。祖冲之は劉徽の率が精密でないの

で、とりわけその数値について推究したのである。今、本書を撰述するにあたり、諸家の説を収拾し、その是非を考えてみると、祖冲之の率が最も精密である。ゆえにこれを劉徽の術の後ろに明らかにし、学ぶ者の判断を願う次第である。

[42][劉注]此周與上觚同耳。周徑相乘各當以半、而今周徑(田)〔兩〕[一]全。故兩母相乘爲四、以報除之。於徽術、以五十乘周、一百五十七而一、即徑也。以一百五十七乘徑、五十而一、即周也。新術徑率猶當微少。則據周以求徑、則失之長。據徑以求周、則失之短。諸據見徑以求冪者、皆失之於微少。據周以求冪者、皆失之於微多。

校訂：[一]郭書春云う、「田は兩字の誤り」と。

訓読：此の周、上の觚と同じきのみ(123)。「周径相乗ず」るは各々当に以て半にすべきに、而るに今周径両つながら全し。故に両母相乗じて四と為し、以て之を報除す(124)。徽の術に於ては、五十を以て周に乗じ、一百五十七にして一とすれば、即ち径也。一百五十七を以て径に乗じ、五十にして一とすれば、即ち周也。新術の径率猶お当に微少なるべし。則ち周に拠りて以て径を求むれば、則ち之を長きに失す(125)。径に拠りて以て周を求むれば、則ち之を短きに失す(126)。諸そ見径に拠りて以て冪を求むる者は、皆之を微少に失す(127)。周に拠りて以て冪を求むる者は、皆之を微多に失す。

注：(123)「上の觚」とは、上の[40]の劉注で述べられている内接正多角形のこと。ここの本文中で用いられている「周」というのも、実は内接正多角形の周長に他ならない、ということ。

(124) ここは、原文「周徑相乘、四而一」に対する注。「各々当に以て半にすべきに」とは、本来周・径とも半分にしてから掛け合わせなければならないのに、との意。「報除」は、「乗分術」の劉注に見え、その注(59)で解説。前に掛けてやったものは、それに対応して後ろで同じ数で割ってやらねばならない、ということ。

(125) Rを直径、Lを実際の周長とすると、R=L÷3.14(劉徽の率)となる。この3.14が実際のπより小さめなので、Rは実際の直径より大きくなる。

(126) 周長をLとすると、L＝3.14×Rである。この3.14がπより小さめなので、Lは実際の周長より小さくなる。

(127)「見径」の「見」は現の義。よって、「見径」は、今ある実際の長さの径の意。

訳：ここで云う「周」も上で述べた正多角形の周長と同じである。「円周と直径を掛け」ると、円周と直径は各々半分にしておかなければならないのに、今、円周・直径ともにそのままである。ゆえに二つの分母(2と2)を掛け合わせて4とし、あとでこの4で割ってやるのである。私の術では、50を円周に掛け、157で割ると、直径の長さとなる。

157を直径に掛け、50で割ると、円周となる。私の新率では、周率より径率がやや小さいので、円周から直径を求めると、やや長いこととなる。直径から円周を求めると、やや短いこととなる。およそ、実際の径から面積を求める時には、すべてやや小さくなり、円周から面積を求める時には、すべてやや大きくなるのである。

[43]**臣淳風等謹按、依密率、以七乘周、二十二而一、即徑。以二十二乘徑、七而一、即周。依術求之、即得。**

訓読：臣淳風等謹みて按ずるに、密率[128]に依れば、七を以て周に乗じ、二十二にして一とすれば、即ち径。二十二を以て径に乗じ、七にして一とすれば、即ち周。術に依りて之を求むれば、即ち得。

注：(128) 注 (84) に引く『隋書』律暦志上によれば、祖冲之の密率は「円径一百一十三、円周三百五十五」であり、それより粗い約率が「円径七、周二十二」である。よって、ここは、「約率に依れば」とすべきところ。以下でも李注の中で「密率」と言っているのは全て「約率」のことである。

訳：臣淳風等謹みて按じますに、密率によって計算すると、7を円周に掛け、22で割れば、即ち直径となる。22を直径に乗じ、7で割れば、即ち円周となる。(円の面積は)、術によって計算すると得られる。

[44] **[劉注] 按圓徑自乘爲外方。三之、四而一者、是爲圓居外方四分之三也。若令六觚之一面乘半徑、其冪即外方四分之一也。因而三之、即亦居外方四分之三也。是爲圓裏十二觚之冪耳。取以爲圓、失之於微少。於徽新術、當徑自乘、又以一百五十七乘之、二百而一。**

訓読：按ずるに、円径自ら乗ずれば、外方を為す[129]。「之を三し、四にして一とす」とは、是れ円、外方の四分の三に居ると為す也[130]。若し六觚の一面をして半径に乗ぜしむれば、其の冪は即ち外方の四分の一也。因りて之を三すれば、即ち亦外方の四分の三に居る也[131]。是れ円裏の十二觚の冪と為すのみ[132]。取りて以て円と為すは、之を微少に失す。徽の新術に於て、当に径自乗して、又一百五十七を以て之に乗じ、二百にして一とす。

注：(129)「外方」とは、円に外接する正方形。

(130) 外接正方形の面積は、$(2r)^2=4r^2$。円の面積は、πr^2で、πを3とする旧術では、$3r^2$となり、よって本文では円の面積は外接正方形の$\frac{3}{4}$となるとしている。

(131) 正6角形の1辺の長さはr、これに半径rを掛けるとr^2となり、外接正方形の面積$4r^2$の$\frac{1}{4}$となる。これを3倍すると、外接正方形の$\frac{3}{4}$となり、以前に円の面積

とされているものになる。

(132) 円に内接する正６角形の１辺の長さと円の半径を掛けて、３倍すると正12角形の面積が得られる。注 (90) 参照。

訳：按ずるに、円の直径を自乗すれば、円に外接する正方形の面積となる。「これを３倍し４分の１にする」とは、このことは円が外接正方形の面積の$\frac{3}{4}$を占めるとしているのである。もし、正６角形の１辺を半径に掛けると、その面積は外接正方形の$\frac{1}{4}$となる。よってこれを３倍すると、これもまた外接正方形の$\frac{3}{4}$を占めるのである。これは円に内接する正12角形の面積と為すべきものである。これを以って円の面積とするのは、やや少ない数値となるのである。私の新術では、まさに直径を自乗して、また157をこれに掛けて、200で割ればよい。

[45] **臣淳風等謹按、密率、令徑自乘、以十一乘之、十四而一、即圓冪也。**

訓読：臣淳風等謹みて案ずるに、密率は、径をして自ら乗ぜしめ、十一を以て之に乗じ、十四にして一とすれば、即ち円の冪也。

訳：臣淳風等謹んで按じますに、密率では、直径を自乗して、これに11を掛け、さらに14で割れば、円の面積となる。

[46] [劉注] 六觚之周、其於圓徑、三與一也。故六觚之周自相乘爲冪、若圓徑自乘者九方。九方凡爲十二觚者十有二、故曰十二而一、即十二觚之冪也。今此令周自乘、非但若爲圓徑自乘者九方而已。然則十二而一、所得又非十二觚之類也。若欲以爲圓冪、失之於多矣。以六觚之周自乘[一]、十二而一可也。於徽新術、直令圓周自乘、又以二十五乘之、三百一十四而一、得圓冪。其率、二十五者、圓冪也。三百一十四者、周自乘之冪也。置周數六尺二寸八分、令自乘、得冪三十九萬四千三百八十四分。又置圓冪三萬一千四百分。皆以一千二百五十六約之、得此率。

校訂：[一]郭書春は、「自乗」を省文であるとし、無くてもよいとするが、あった方がわかりやすい。

訓読：六觚の周、其の円径において、三と一也。故に六觚の周自ら相乗じて冪と為せば、円径自ら乗ずるものは九方の若し(133)。九方は、凡そ十二觚なる者十有二と為す(134)。故に「十二にして一とす」と曰うは、即ち十二觚の冪也。今、此れ周をして自ら乗ぜしむれば、但に円径自ら乗ずる者の九方と為すが若きにあらざるのみ。然らば則ち「十二にして一とす」れば、得る所は又十二觚の類に非ざる也(135)。若し以て円冪と為さんと欲すれば、之を多きに失す(136)。六觚の周を以て自ら乗じ、十二にして一と

するは可也[137]。徽の新術においては、直ちに円周をして自ら乗ぜしめ、又二十五を以て之に乗じ、三百一十四にして一とすれば、円冪を得。其の率、二十五なる者は、円冪なり。三百一十四なる者は、周の自ら乗ずるの冪也。周数六尺二寸八分を置き、(之をして) 自ら乗ぜしむれば、冪三十九萬四千三百八十四分を得。又円冪三萬一千四百分を置く。皆一千二百五十六を以て之を約せば、此の率を得[138]。

注：(133) 正６角形の周長と円の直径の比は３：１。よって各々の自乗比は９：１となる。「九方」の「方」が注 (129) の「外方」、即ち円に外接する正方形で、「九方」は、その正方形９個分の面積の意。

(134) 正６角形の周長は、６rだから、その自乗は、$(6r)^2$。直径の自乗は$R^2=4r^2$だから $(6r)^2=36r^2=9R^2$となる。ところで、正６角形の１辺の長さと円の半径を掛け合わせて３倍すると、正12角形の面積となる。即ち、$S_{12}=\frac{3}{4}\times R^2$から、$9R^2=12\times\frac{3}{4}\times R^2=12S_{12}$となる。

(135) 円周の自乗が外方の９個分にとどまらないのでそれを12でわったものも正12角形の面積にとどまらないということ。

(136) $(2\pi r)^2\div 12=\frac{\pi^2 r^2}{3}=\frac{\pi}{3}\times\pi r^2$となる。$\frac{\pi}{3}$は、１より大きい。よって、円周の自乗を12でわったものは実際の円の面積より多くなる。

(137) この計算によって求めることができるのは、正12角形の面積。上の、$(6r)^2=12\times\frac{3}{4}\times R^2=12S_{12}$から、$S_{12}=(6r)^2\div 12$となる。

(138) $628^2 : 3.14\times 10^2=394384 : 31400=314\times 1256 : 25\times 1256=314 : 25$となる。

訳：正６角形の周長の、円の直径に対する比率は３対１である。ゆえに正６角形の周長を自乗した面積は、円の直径を自乗してできる正方形の面積の９個分である。この９個の正方形の面積とはそもそも正12角形12個分に当たる。ゆえにこれを「12で割る」と、正12角形の面積となる。今ここで周長を自乗させるならば、ただ単に円の直径を自乗した正方形９個分の面積となるだけではないのである。そうすると、「12で割」って得られるのも正12角形の面積の類いではないのである。もしそれを円の面積となそうとするなら、多すぎることになる。正６角形の周長を自乗して、これを12で割って (正12角形の面積を出そうとするのは) よろしいのであるが。私の新術では、直ちに円周を自乗させて、さらに25をこれに掛け、314で割ると、円の面積が得られる。その率の、25というのは円の面積の率、314というのは円周を自乗した面積の率である。周数６尺２寸８分を置き、自乗して面積394384分を得させ、また円の面積31400分を置き、両者とも1256で約すると、この率が得られる。

[47]**臣淳風等謹按、方面自乘即得其積。圓周求其冪、（股）〔假〕**[一]**率乃通。但此術所求用三・一爲率。圓田正法、半周及半徑以相乘。（令）〔今〕**[二]**乃用全周自乘、故須以十二爲母。何者、據全周而求半周、則須以二爲法。就全周而求半徑、復假六以除之。是二・六相乘、除周自乘之數。依密率、以七乘之、八十八而一。**

校訂：［一］郭書春云う、「股は假の誤り」と。

［二］郭書春云う、「令は今の誤り」と。

訓読：臣淳風等謹みて按ずるに、方の面自ら乗ずれば、即ちその積を得。円周もて其の冪を求むるは、率を仮れば乃ち通ず(139)。但此の術の求むる所、三･一を用いて率と為す。円田の正法は、半周及び半径以て相乗ず。今乃ち全周自ら乗ずるを用う。故に須らく十二を以て母と為すべし。何となれば、全周に拠りて半周を求むれば、則ち須らく二を以て法と為す。全周に就いて半径を求むれば、復た六を仮りて以て之を除す。是れ二・六相乗ずるは、周の自ら乗ずるを除するの数なり。密率に依れば、七を以て之に乗じ、八十八にして一とす。

注：(139)「率を仮れば乃ち通ず」とは､円周率を借りて始めて計算を進めることができる、ということ。

訳：臣淳風等謹んで按じますに、正方形の１辺を自乗するとその面積が得られる。円周からその面積を求めるというのは、円周率を用いて始めて計算を進めることができるのである。しかし、この術で求めている面積は、円周３・直径１という数値を率としているものである。円田の正規の求積法は、半周と半径を互いに掛け合うのである。今は、全周を自乗する法を用いている。ゆえに12を分母としなければならない。どうしてかと言うと、全周から半周を求めるには、２を除数として割らねばならない。全周から半径を求めるには、また６でもってこれを割らねばならない。これが２と６を掛けた12が､全周の自乗を割る数たる所以である。密率によれば、７を円の自乗に掛け、88で割る。

参考文献

１）李継閔『《九章算術》校証』（1993年９月）
２）郭書春『匯校九章算術』（2004年８月）
３）郭書春･劉鈍『算経十書』（1998年12月、遼寧教育出版社）、（2001年４月、九章出版社）
４）川原秀城「劉徽註九章算術」（『中国天文学・数学集』所収、1980年11月）
５）白尚恕『《九章算術》注釈』（1983年12月）
６）沈康身『九章算術導読』（1997年２月）

７）李継閔『《九章算術》及其劉徽注研究』(1992年８月)

８）李継閔『《九章算術》導読与訳注』(1998年９月)

９）李籍『九章算術音義』(叢書集成初編本『九章算術』所収)

10)「九章算術補註」(李儼『中算史論叢』(三)、1935年12月)

11) 楊輝『詳解九章算法』(百部叢書集成本)

12) 李潢『九章算術細草図説』(嘉慶庚辰版本)

13) 清水達雄『九章算術』１～15(「数学セミナー」1975年２月号～1976年４月号)

14) 張家山漢簡『算数書』研究会編『漢簡『算数書』-中国最古の数学書-』(朋友書店、2006年10月)

15) Shen, Kang-Shen; Crossley, John N; Lun, Anthony W. C.『The Nine Chapters on the Mathematical Art：Companion and Commentary』(Oxford Univ Pr, 1999)

16) 大川俊隆『九章算術』訳注稿(1)大阪産業大学論集　人文･社会科学編２号(2008年２月)

17) 大川俊隆『九章算術』訳注稿(2)大阪産業大学論集　人文･社会科学編３号(2008年６月)

18) Chemla, Karine; Guo, Shuchun『Les neuf chapîtres, Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires』(Dunod, 2004)