『九章算術』訳注†稿（14）

武　田　時　昌、田　村　　誠

中国古算書研究会

大川　俊隆、小寺　裕、角谷　常子、武田　時昌

田村　三郎、田村　誠、張替　俊夫、吉村　昌之

Translation and Annotation of "The Nine Chapters on the Mathematical Art（九章算術）" Vol. 14

TAKEDA Tokimasa

TAMURA Makoto

Abstract

"The Nine Chapters on the Mathematical Art" was the oldest book of mathematics in China before the unearthing of "Suanshu-shu." The aim of our research is to provide a complete translation and annotation of it including annotations of Liu Hui（劉徽）and Li Chunfeng（李淳風）from the viewpoint of our previous work on "Suanshu-shu."

This is the third article based on our research and results in which we studied the problems 8 to 13 of Chapter 5, Shanggong（商功）.

『九章算術』は『算数書』出土以前は数学書としては中国最古のものであった。我々は、我々の『算数書』研究を起点に、『九章算術』の劉徽注、李淳風注を含めた訳注を完成させることを目的としている。

† This work was partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research（C）（20500879）.

平成24年３月１日　原稿受理

本論文では、商功章の算題 (8)～(13) に対する訳注を与える。

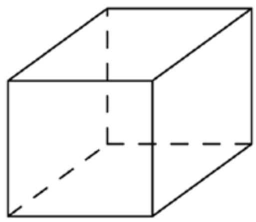
九章算術巻第五(続き)

［八］今有方堢壔[14]、方一丈六尺、高一丈五尺。問積幾何。荅曰、三千八百四十尺。術曰、方自乗、以高乗之、即積尺。

訓読： 今、方堢壔[(26)]有り、方一丈六尺、高一丈五尺。問う、積は幾何ぞ。答えに曰う、三千八百四十尺[(27)]。

術に曰く、方自乗し、高を以て之に乗ずれば、即ち積尺なり。

注： (26) 堢壔とは、猛獣などの襲撃に備え、土塁で築いた小さな居住空間、あるいは外敵の攻撃を防ぐための砦、物見の望楼等の建造物を指す (劉注[14]参照)。ここでは角柱のこと (右図参照)。なお、近代数学用語でも、角柱、円柱に「角壔」「圓壔」を用いていた。



(27) ここでの計算は、次の通りである。

方堢壔の体積＝（方16尺）^{2}×高さ15尺=3840立方尺

訳： 今、方形の堢壔（正四角柱）がある。（底面の）正方形の１辺は１丈６尺、高さ１丈５尺である。問う、体積は如何ほどであるか。答えにいう、3840立方尺。

術にいう、正方形の１辺を自乗し、高さを掛けると、すなわち体積の尺数になる。

[14] [劉注] 堢者、堢城[(28)]也。壔音丁老切[一]。又音纛。謂以土擁木也。

校訂： [一]聚珍版、四庫本は、「切」を「反」に作る。

訓読： 堢とは、堢城なり。壔音、丁老の切。又音纛。土を以て木を擁(ささ)うるを謂う也。

注： (28) 堢城は、村邑の周囲を取り囲んだ城郭より規模が小さい居住空間、あるいは土塁をめぐらした砦を言う。『説文』巻一三下に「壔、保也。高土也。从土壽聲、讀若毒」、『広韻』上声晧第三十二に「堢、堢障、小城」、李籍の『音義』に「堢壔、上音寶、小城也。下音島、以土擁木也」とある。

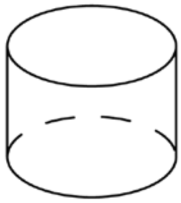
訳： 堢とは、堢城 (小規模な城) である。壔の音は、丁老の切。又音纛(と)。土を用いて木枠を支えることを謂う。

[九]今有圓垛壔、周四丈八尺、高一丈一尺。問積幾何。荅曰、二千一百一十二尺[15][16]。

術曰、周自相乘、以高乘之、十二而一[17][18]。

訓読：今、圓垛壔有り、周四丈八尺、高一丈一尺。問う、積は幾何ぞ。答えに曰う、二千一百一十二尺(29)。

術に曰く、周自ら相乗じ、高を以て之に乗じ、十二にして一とす。



注：(29)「圓垛壔」は円柱のこと（右図参照）。ここでの計算は、次の通りである。

円垛壔の体積＝（周48尺）^{2}×高さ11尺÷12＝2112立方尺

訳：今、円形の垛壔（形状は円柱）があり、円周４丈８尺、高さ１丈１尺である。問う、体積は如何ほどであるか。答えにいう、2112立方尺。

術にいう、円周を自乗し、高さを掛け、12で割る。

[15] **[劉注]於徽術、當積二千一十七尺一百五十七分尺之一百三十一。**

訓読：徽の術に於いては、当に積二千一十七尺一百五十七分尺の一百三十一たるべし(30)。

注：(30) 円周率πに徽率$\frac{157}{50}$を用いる場合である。ここでの計算は、次の通りである。

計算式については、注 (32) 参照。

円垛壔の体積＝（周48尺）^{2}×高さ11尺÷$\left(4\times\frac{157}{50}\right)$＝$2017\frac{131}{157}$立方尺

訳：私めの術では、まさに体積$2017\frac{131}{157}$立方尺とすべきである。

[16] **臣淳風等謹按、依密率、積二千一十六尺。**

訓読：臣淳風等謹みて按ずるに、密率に依れば、積二千一十六尺たり(31)。

注：(31) 円周率πに李淳風のいう密率$\frac{22}{7}$を用いる場合である。李淳風の密率については、19) の注 (84) を見よ。ここでの計算は、次の通りである。計算式については、注 (33) 参照。

（周48尺）^{2}×高さ11尺÷$\left(4\times\frac{22}{7}\right)$＝2016立方尺

訳：臣淳風等が謹んで按じますに、密率によると、体積は2016立方尺である。

[17] **[劉注]此章諸術、亦以周三徑一爲率、皆非也。於徽術、當以周自乘、以高乘之、又以二十五乘之、三百一十四而一。此之圓冪、亦如圓田之冪也。求冪亦如圓田、而以高乘冪也。**

訓読：此の章の諸術、亦た周三径一を以て率と為すは、皆非なり。徽の術に於いては、当に周を以て自乗し、高を以て之に乗じ、又た二十五を以て之に乗じ、三百一十四にして一とすべし(32)。此の円冪は、亦た円田の冪の如き也。冪を求むること亦た円田の如くし、而して高を以て冪に乗ずる也。

注：(32) 円垜壔の体積＝周^2×高さ÷4πの公式において、徽率$\pi=\dfrac{157}{50}$とすると、
周^2×高さ÷$\left(4\times\dfrac{157}{50}\right)$＝周^2×高さ×$\dfrac{25}{314}$となる。

訳：この章（商功章）の諸術において、これまでと同様に「周三径一」を円周率としているのは、いずれも正しくない。私めの術では、まさに周を自乗し、高さを掛け、また25を掛け、314で割るべきである。この（底面の）円の面積は、また（方田章の）円田の面積と同じである。面積を算出するのは、また円田の場合と同様にし、そして高さをその面積に掛ける。

[18] **臣淳風等謹按、依密率、以七乘之、八十八而一。**

訓読：臣淳風等謹みて按ずるに、密率に依れば、七を以て之に乗じ、八十八にして一とす(33)。

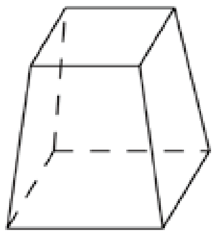
注：(33) 注(32)の体積公式において、$\pi=\dfrac{22}{7}$とすると、
周^2×高さ÷$\left(4\times\dfrac{22}{7}\right)$＝周^2×高さ×$\dfrac{7}{88}$となる。

訳：臣淳風等謹みて按じますに、密率によると、7を掛け、88で割る。

[一〇]今有方亭、下方五丈、上方四丈、高五丈[一]。問積幾何。荅曰、一十萬一千六百六十六尺太半尺。
術曰、上下方相乘、又各自乘、并之、以高乘之、三而一[19]。

校訂：[一]南宋本は、「丈」を「尺」に誤る。

訓読：今、方亭有り、下方五丈、上方四丈、高さ五丈。問う、積は幾何ぞ。答えに曰う、一十万一千六百六十六尺太半尺(34)。
術に曰く、上下方相乗じ、又各々自乗し、之を并せ、高を以て之に乗じ、三にして一とす。



注：(34)「方亭」とは正四角錐台のこと(右図参照)。ここでの計算は、次の通りである。

方亭の体積

$= \{$上方40尺 × 下方50尺 + (上方40尺)^2 + (下方50尺)$^2\}$ × 高さ50尺 ÷ 3

$= 101666\frac{2}{3}$立方尺

訳：今、方亭（正四角錐台）があり、下辺は５丈、上辺は４丈、高さは５丈である。問う、体積は如何ほどであるか。答えにいう、$101666\frac{2}{3}$立方尺。

術にいう、上下２辺を掛け合わし、またそれぞれを自乗し、すべてを加えて、高さを掛けて、３で割る。

[19] **[劉注]此章有塹堵・陽馬。皆合而成立方。蓋説筭者、乃立棊三品、以效高深之積。假令方亭上方一尺、下方三尺、高一尺、其用棊也、中央立方一、四面塹堵四、四角陽馬四。上下方相乘、爲三尺、以高乘之、(約)〔得〕[一]積三尺。是爲得中央立方一、四面塹堵各一。(上方自乘、亦得中央立方一。)[二]下方自乘、爲九、以高乘之、得積九尺。是爲中央立方一、四面塹堵各二、四角陽馬各三也。上方自乘、以高乘之、得積一尺。又爲中央立方一。凡三品棊、皆一而爲三。故三而一、得積尺。用棊之數、立方三、塹堵・陽馬各十二、凡二十七。棊十三[三]、更差次之、而成方亭者三、驗矣。**

爲術、又可令方差自乘、以高乘之、三而一、即四陽馬也。上下方相乘、以高乘之、即中央立方及四面塹堵也。幷之、以爲方亭積數也。

校訂：[一]白尚恕は、「約」を「得」に改める。下文の用例から見て、これに従う。

[二]「上方自乘亦得中央立方一」十一字は、戴震、李潢に従って衍文とする。

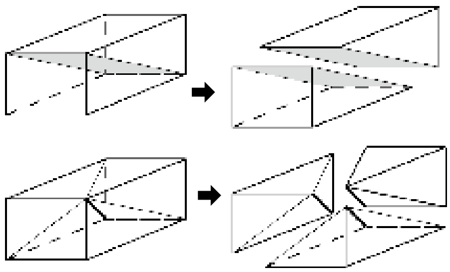
[三]四庫本の割注で、戴震は「案此句有脱誤。據塹堵陽馬各十二分配立方三、則一立方適得四塹堵、四陽馬。當云『十二與三、更差次之』」と述べ、「十三」を「十二與三（十二と三と）」に改めるべきであるとするが、本文のままでも解釈できるので、従わない。注(37)(38)参照。

訓読：此の章に塹堵・陽馬有り(35)。皆合して立方を成す。蓋し算を説く者は、乃ち棊三品を立て、以て高・深の積を效す。仮令に方亭をして上方一尺、下方三尺、高一尺ならしむれば、其の棊を用うるや、中央の立方一、四面の塹堵四、四角の陽馬四なり(36)。上下の方相乗ずれば、三尺と為り、高を以て之に乗ずれば、積三尺を得。是れ中央の立方一、四面の塹堵各一を得ると為す。下方自乗すれば、九と為り、高を以て之に乗

ずれば、積九尺を得。是れ中央の立方一、四面の壍堵各々二、四角の陽馬各々三と為す也。上方自乗し、高を以て之に乗ずれば、積一尺を得。又た中央の立方一と為す。凡そ三品の棊、皆一にして三と為す。故に三にして一とすれば、積尺を得。棊を用うるの数、立方三、壍堵・陽馬各々十二、凡そ二十七なり。棊の十三(38)は、更ごも之を差次し(39)、而して方亭を成す者三ありて、験あり。

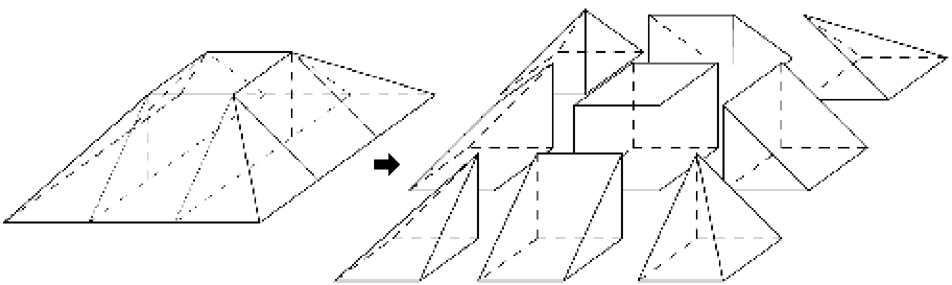
術を為すに(40)、又た方の差をして自乗し、高を以て之に乗じ、三にして一たらしむれば、即ち四陽馬なるべし。上下の方相乗じ、高を以て之に乗ずれば、即ち中央の立方及び四面の壍堵なり。之を并すれば、以て方亭の積数と為る也。

注：(35) 直方体を、対向する２面の対角線を含む平面で２等分して得られる図形が壍堵である（右図上段参照）。また、直方体の対角線を１辺に持つような四角錐３つに分けたそれぞれを陽馬という（右図下段参照）。ここでは簡単のため、立方体の壍堵・陽馬について議論している。壍堵は[十四]、陽馬は[十五]に後出する。



(36)「棊」の語は32) の注(167)に既出で、当時の博戯で用いる木製のコマの意で、それが転じて立体模型を指す。方亭を切断すると、立方体、壍堵、陽馬等の基本的な立体に分けることができる。そこで、棊を用いて体積公式の検証を試みる。劉徽注に独自の証明法であり、今日では「棊験法」と呼ばれている。

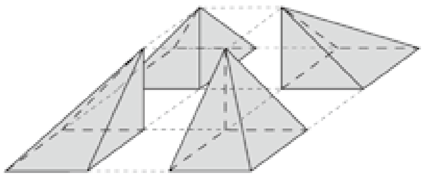
(37) 方亭（正四角錐台）を分解すると、中央に立方体、四面に壍堵、四隅（原文は「四角」）に陽馬がそれぞれ得られる。そこで、各辺の長さが１尺である立方体、壍堵、陽馬の３種類の棊を準備し、それらを組み合わせて上広１尺、下広３尺、高さ１尺の方亭を作ると下図のように、棊は立方体が１個、壍堵が４個、陽馬が４個である。

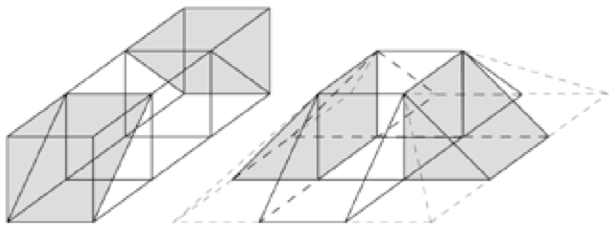


(38) 証明に用いた棊は全部で27個あり、その体積の総和は、立方体３個×１＋壍堵12個×$\frac{1}{2}$＋陽馬12個×$\frac{1}{3}$＝13立方尺である。それを組み替えて所与の方亭を作ると、３個できる。「棊十三」は、「棊積十三」のことであろう。

(39)「差次」とは、『漢書』高后紀に「今欲差次列侯功、以定朝位」とあり、顔師古注に「以功之高下爲先後之次」とあるように、差をつけて配列することである。ここでの具体的な意味は、27個の棊を配列し直して方亭３個に組み替えることである。

(40) 以下では、方亭の体積計算の別法を述べている。右図に示すように（下方－上方）×高さ÷３は陽馬４個分の体積になる。また、（上方×下方×高さ）は、下図のように、壍堵を２つ移動させると方亭から陽馬４個を除いた部分の体積となる。





この術を式で表せば、上方a , 下方 b, 高さhとして方亭の体積 V は

$V=(b-a)^2\frac{h}{3}+abh$となる。さらに変形すれば、本文［一〇］の術の式

$V=\{(b-a)^2+3ab\}\frac{h}{3}=(ab+a^2+b^2)\frac{h}{3}$が得られる。『数』には、0830簡に本文と同等の術が述べられている。『算数書』には方亭は見られないが、より一般的な形状（底面が長方形）の芻は扱われている。

訳：本章（商功章）には、壍堵・陽馬が扱われており、どちらも（同じものをいくつか）重ね合せると立方体になる。思うに、算術を説いた者は、はじめに（立方体・壍堵・陽馬の）３種類の棊（立体模型）を設けて、高さ、深さのある立体の体積計算を理解できるようにしたのである。たとえば、方亭の上辺が１尺、下辺が３尺、高さが１尺と仮定した場合、使用する棊は、中央の立方体が１個、四面の壍堵が４個、四隅の陽馬が４個になる。上下２辺を掛け合わせると、３平方尺になり、高さを掛けると、３立方尺の体積を得る。これは中央の立方体１個、四面の壍堵それぞれ１個（の体積）を得たことになる。下辺を自乗すると、９平方尺になり、高さを掛けると、９立方尺の体積を得る。これは中央の立方体1個、四面の壍堵それぞれ２個、四隅の陽

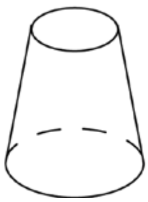
馬それぞれ２個（の体積）である。上辺を自乗し、高さを掛けると、１立方尺の体積を得る。これは、また中央の立方体１個（の体積）である。凡そ３種類の棊は、（中央、四面、四隅の）どれも３倍の個数となる。だから３で割れば、方亭の立方尺の体積を得る。用いた棊の数は、立方体が３個、壍堵・陽馬がそれぞれ12個、全部で27個になる。（それらの）棊の総体積は13立方尺となるが、それぞれ組み立て直すと方亭が３個できるので、（方亭の体積公式が正しいことが）検証できるのである。

（別の）術を行うと、上辺と下辺の差を自乗し、高さを掛けて、３で割ると、４個の陽馬（の体積）になる。上下２辺を掛け合わし、高さを掛けると、中央の立方及び四面の壍堵（の体積）になる。それらを加え合わせると、方亭の体積となるのである。

[一一]今有圓亭、下周三丈、上周二丈、高一丈。問積幾何。荅曰、五百二十七尺九分尺之七[20][21]。
術曰、上下周相乘、又各自乘、幷之、以高乘之、三十六而一[22][23]。

訓読：今、円亭有り、下周三丈、上周二丈、高一丈。問う、積は幾何ぞ。答えに曰う、五百二十七尺九分尺の七。
術に曰う、上下の周相乗じ、又各々自乗し、之を并せ、高を以て之に乗じ、三十六にして一とす(41)。

注：(41) ここの計算は、次の通りである。



円亭の体積

$$= \left\{上周20尺 \times 下周30尺 + (上周20尺)^2 + (下周30尺)^2\right\} \times 高さ10尺 \div 36$$

$$= 527\frac{7}{9}立方尺$$

訳：今、円亭が有り、下周３丈、上周２丈、高さ１丈である。問う、体積は如何ほどであるか。答えにいう、$527\frac{7}{9}$立方尺。
術にいう、上下の周を掛け合わし、またそれぞれを自乗し、すべてを加えて、高さを掛けて、36で割る。

[20] **[劉注]於徽術、當積五百四尺四百七十一分尺之一百一十六也。**
訓読：徽の術に於いては、当に積五百四尺四百七十一分尺の一百一十六なるべき也。
訳：私めの術では、まさに体積$504\frac{116}{471}$立方尺とすべきである。

[21]**〔臣淳風等謹〕按、〔依〕密率**[一]**爲積五百三尺三十三分尺之二十六。**

校訂：[一]南宋本は「按密率」に作るが、他例に倣って「臣淳風等謹」と「依」の６字を補う。

訓読：臣淳風等謹みて按ずるに、密率に依れば、積を為すこと五百三尺三十三分尺の二十六なり。

訳：臣淳風等謹みて按じますに、密率によると、体積は$503\frac{26}{33}$立方尺になる。

[22]**[劉注]此術周三徑一之義。合以三除上下周、各爲上下徑、以相乘、又各自乘、并以高乘之、三而一、爲方亭之積。假令三約上下周、俱不盡。還通之、即各爲上下徑。令上下徑（分母）**[一]**相乘、又各自乘、并以高乘之、爲三方亭之積分。此合分母三相乘得九、爲法、除之。又三而一、得方亭之積。〔從方亭求圓亭之積、〕**[二]**亦猶方冪中求圓冪。乃令圓率三乘之、方率四而一、得圓亭之積。前求方亭之積、乃以三而一、〔今〕**[三]**求圓亭之積、亦（各）〔令〕**[四]**三乘之。二母既同、故相準折。惟以方冪四乘分母九得三十六、而連除之。**
於徽術當上下周相乘、又各自乘、并以高乘之、又二十五乘之、九百四十二而一。此方亭[五]**四角圓殺。比於方亭二百分之一百五十七。爲術之意、先作方亭、三而一、則此據上下徑爲之者、當又以一百五十七乘之、六百而一也。今據周爲之、若於圓垜壔、又以二十五乘之、三百一十四而一、則先得三圓亭矣。故以三百一十四爲九百四十二而一、并除之。**

校訂：[一]「分母」二字は、戴震の校勘に従い、衍字とする。

[二]戴震は、[二五]の劉徽注に「從方錐中求圓錐之積、亦猶方冪求圓冪」とあるのに従って「從方亭求圓亭之積」八字を補う。今これに従う。

[三]南宋本は「今」字を欠くが、大典本、楊輝本に従って補う。

[四]南宋本、楊輝本は「各」字に作るが、聚珍版、四庫本は「合」に作り、李潢は、「「各」當作「令」、或作「合」、亦通」と述べる。李潢の校勘に従い、「令」に改める。

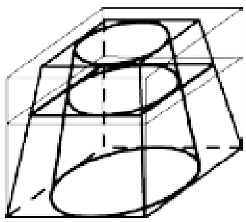
[五]李潢は、「方亭」は「圓亭」に改めるべきであるとするが、原文のままとする。

訓読：此の術は「周三径一」の義なり(42)。合に三を以て上下の周を除して、各々上下の径と為し、以て相乗じ、又各々自乗し、并せて高を以て之に乗じ、三にして一とすれば、方亭の積と為るべし。仮令に三もて上下の周を約せしむれば、倶に尽きず。還た之を通ずれば、即ち各々上下の径と為る。上下の径をして相乗ぜしめ、又た各々自乗し、并せて高を以て之に乗ずれば、三方亭の積分と為る。此れ合に分母の三相乗ずれば、九を得て、法と為し、之を除すべし。又三にして一とすれば、方亭の積を得。方亭従り円亭の積を求むるは、亦猶お方冪中より円冪を求むるがごとし。乃ち円率三をして之に乗ぜしめ、方率四にして一とせしむれば、円亭の積を得(43)。前に方亭の積を求むるは、乃ち三を以て一とす。今、円亭の積を求むるは、亦三をして之に乗ぜし

む。二母既に同じ、故に相準折す(44)。惟れ方冪四を以て分母九に乗じて三十六を得、而して之を連除す(45)。

徽の術に於いては、当に上下の周相乗じ、又各々自乗し、并せて高を以て之に乗じ、又二十五もて之に乗じ、九百四十二にして一とすべし。此れ方亭の四角を円く殺ぐ。方亭に比すること二百分の一百五十七なり。術を為すの意は、先ず方亭を作し、三にして一とす。則ち此れ上下の径に拠りて之を為す者は、当に又た一百五十七を以て之に乗じ、六百にして一とすべきなり。今、周に拠りて之を為すこと、円垜壔の若し(46)。又二十五を以て之に乗じ、三百一十四にして一とすれば、則ち先ず三円亭を得。故に三百一十四を以て九百四十二と為して一とし、之を并除す(47)。

注：(42)「周三徑一之義」とは、円率 π の値に 3 を用いるとの意。方亭とそれに内接する円亭を水平面で切断すると、どの断面でも正方形とそれに内接する円になる（右図参照）。劉徽は、方亭と円亭の体積比が正方形と内接円の面積比に等しいことから、術文の計算を導出する。



(43)「三方亭之積分」とは、円亭の上周・下周を上方・下方として考えた大きな方亭の体積 3 つ分の意。したがって、

$$\text{三（大）方亭の体積} = \left(\text{上周}\times\text{下周}+\text{上周}^2+\text{下周}^2\right)\times\text{高さ}$$

である。円率を 3 としているので、円亭に外接する方亭は、その上径・下径が大方亭の上方・下方の $\frac{1}{\pi}=\frac{1}{3}$ であるので、体積は大方亭の $\frac{1}{\pi^2}=\frac{1}{9}$ となる。すなわち、

$$\text{方亭の体積} = \frac{\text{大方亭の体積}}{\pi^2}$$

である。さらに、正方形と内接円の面積比 $4:\pi=4:3$ は、方亭と円亭の体積比に等しいので、円亭の体積＝方亭の体積 $\times\frac{\pi}{4}$ である。以上より、

$$\begin{aligned}\text{円亭の体積} &= \text{方亭の体積}\times\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\text{大方亭の体積}}{\pi^2}\times\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\text{三（大）方亭の体積}}{\pi^2}\div 3\times\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{(\text{上周}\times\text{下周}+\text{上周}^2+\text{下周}^2)\times\text{高さ}}{\pi^2}\div 3\times\frac{\pi}{4}\\ &\fallingdotseq \frac{(\text{上周}\times\text{下周}+\text{上周}^2+\text{下周}^2)\times\text{高さ}}{9}\div 3\times\frac{3}{4}\\ &= \frac{(\text{上周}\times\text{下周}+\text{上周}^2+\text{下周}^2)\times\text{高さ}}{9\times 4}\end{aligned}$$

となる。

(44)「二母既同、故相準折」とは、注 (43) の計算過程で、三（大）方亭の体積を割る 3 と、方亭の体積にかける円率 $\pi = 3$ がそろっているので、これらを約して計算を簡略化することを述べたものである。「準折」という表現は本章の［二五］の劉注でも用いられているが、簡略化の方法は同じである。より精確な円率を用いれば結果は違ってくるのは明らかで、そのため劉徽は、「準折」という表現をとくに用いたのであろう。

(45) この「連除」とは $9 \times 4 = 36$ で割るということ。17) の注 (60) に従えば、36そのもので割るということであるが、後文の「并除」と使い分けをされていることから、実際の計算では連続する除算、すなわち $\div 9 \div 4$ のように 1 桁の数による割り算に分解して行うことを意味していた可能性もある。

(46) ここの劉徽注では、円垜壔（円柱）の体積公式、すなわち

$\dfrac{\text{周}^2 \times \text{高さ}}{4\pi} = \text{周}^2 \times \text{高さ} \times \dfrac{25}{314}$ と対比させ、

$\left(\text{上周} \times \text{下周} + \text{上周}^2 + \text{下周}^2\right) \times \text{高さ} \times \dfrac{25}{314}$ という式によって得られる積実は、円亭の 3 個分に相当すると考えている。

(47) この「并除」とは $314 \times 3 = 942$ で割るということ。ここでは除数が大きいので、割り算を分解する利点はほとんど失われている。実際の計算でも942そのもので割っていたと思われる。

訳：この術には、「周三径一」の意がある。まさに 3 で上下の周を割って上下の径とし、それら（上下の径）を相乗じ、またそれぞれ自乗し、加え合わせて高さを掛け、 3 で割ると、方亭の体積になる。仮に 3 で上下の周を割ると、ともに割り切れない。そこで、逆に分母のほうに通じて、（円周の数値のままで）それぞれを上下の径とする。上下の径を相乗じ、またそれぞれ自乗し、加え合わせて高さを掛けると、方亭 3 個の体積になる。この場合、まさに分母の 3 を相乗じて 9 を得て、それを法として割るべきである。さらに 3 で割ると、方亭の体積を得る。方亭から円亭の体積を求めるのは、方冪（正方形の面積）の中に円冪（内接円の面積）を求めるのと同様である。すなわち、円率 3 を掛け、方率 4 で割ると、円亭の積を得る。先に方亭の積を求めた際には 3 で割ったのであるが、今、円亭の積を求める際には 3 を掛ける。 2 つの母数は同じであるから、互いに等しく約分する。ところで、方冪 4 を分母 9 に掛けて36として連除する。

私めの術においては、まさに上下の周を相乗じ、またそれぞれ自乗し、加え合わせ

て高さを掛け、さらに25を掛け、942で割る。これ（円亭）は、方亭の四角を丸くそぎ落としたものであり、方亭に比べると200分の157になる。術文の数理は、先ず方亭の体積を求め、３で割ったものである。したがって、上下の径に依拠して計算を行う場合には、まさに157を掛け、600で割るべきである。今、円周に依拠して計算を行う場合は、円垜壔と同様である。25を掛け、314で割れば、すなわちまず円亭３つの体積が得られる。そこで314を（３倍した）942にし、それを法として并除する。

[23]**臣淳風等謹按、依密率、以七乘之、二百六十四而一。**

訓読：臣淳風等謹みて按ずるに、密率に依れば、七を以て之に乘じ、二百六十四にして一とす。

訳：臣淳風等謹みて按じますに、密率によると、７を掛け、264で割る。

[一二]今有方錐、下方二丈七尺、高二丈九尺。問積幾何。荅曰、七千四十七尺。
術曰、下方自乘、以高乘之、三而一[24]。

訓読：今、方錐有り、下方二丈七尺、高二丈九尺。問う、積は幾何ぞ。答えに曰う、七千四十七尺。

術に曰く、下方は自乘し、高を以て之に乘じ、三にして一とす(48)。

注：(48) ここでの計算は、次の通りである。

方錐の体積＝（下方27尺）^{2}×高さ29尺÷３＝7047立方尺

訳：今、方錐があり、下辺２丈７尺、高さ２丈９尺である。問う、体積は如何ほどであるか。答えにいう、7047立方尺。

術にいう、下辺を自乗し、高さを掛け、３で割る。

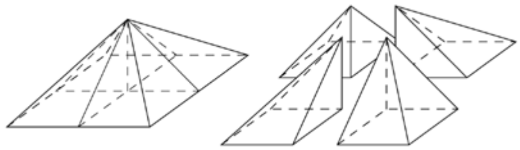
[24]**［劉注］按、此術假令方錐下方二尺、高一尺、即四陽馬。如術爲之、用十二陽馬、成三方錐。故三而一、得（陽馬）〔方錐〕[一]也。**

校訂：[一]「陽馬」は、李潢の校勘に従い、「方錐」に改める。

訓読：按ずるに、此の術、假令（かり）に方錐をして下方二尺、高一尺たらしむれば、即ち四陽馬なり(49)。術の如くして之を為せば、十二陽馬を用いて三方錐と成る(50)。故に三にして一とすれば、方錐を得る也。

注：(49) 方錐は、右図のように切断すると、陽馬4個に分割できる。

(50) 術文の「下方自乗、以高乗之」に従えば、下辺2尺、高1尺の直方体の体積が得られる。その直方体は、単位長の立方体4個であり、12個の陽馬に分割できる。そこで、12個の陽馬を組み立て直すと、方錐は3個できる。



訳：按ずるに、この術において、例えば方錐が下方2尺、高1尺であれば、すなわち4個の陽馬になる。（方錐の）術文に従って（陽馬から方錐を）作ると、12個の陽馬を用いて3個の方錐ができる。だから3で割ると、方亭（の体積）が得られるのである。

[一三]今有圓錐、下周三丈五尺、高五丈一尺。問積幾何。荅曰、一千七百三十五尺一十二分尺之五[25][26]。

術曰、下周自乘、以高乘之、三十六而一[27][28]。

訓読：今、円錐有り(51)、下周三丈五尺、高五丈一尺。問う、積は幾何ぞ。答えに曰う、一千七百三十五尺一十二分尺の五。

術に曰う、下周は自乗し、高を以て之に乗じ、三十六にして一とす(52)。

注：(51)『算数書』の算題【13】では、円錐形の立体を「囷蓋」と呼んでいる。

(52) ここでの計算は、次の通りである。

円錐の体積 $=$（下周35尺）$^2\times$高さ51尺$\div 36 = 1735\frac{5}{12}$立方尺

訳：今、円錐があり、下周3丈5尺、高さ5丈1尺である。問う、体積は如何ほどであるか。答えにいう、$1735\frac{5}{12}$立方尺。

術にいう、下周を自乗し、高さを掛け、36で割る。

[25] [劉注]於徽術、當積一千六百五十八尺三百一十四分尺之十三。

訓読：徽の術に於いては、当に積一千六百五十八尺三百一十四分尺の十三たるべし(53)。

注：(53) ここでの計算は、次の通りである。

円錐の体積 $=$（下周35尺）$^2\times$高さ51尺$\times\frac{25}{942}=1658\frac{13}{314}$立方尺

訳：私めの術では、まさに体積$1658\frac{13}{314}$立方尺とすべきである。

[26]〔**臣淳風等謹按**〕[一]**、依密率、爲積一千六百五十六尺八十八分尺之四十七。**

校訂：[一]南宋本、楊輝本はともに、「臣淳風等謹按」の6字が欠落している。

訓読：臣淳風等謹みて按ずるに、密率に依れば、積を為すこと一千六百五十六尺八十八分尺の四十七(54)。

注：(54) ここでの計算は、次の通りである。

$$\text{円錐の体積} = (\text{下周}35\text{尺})^2 \times \text{高さ}51\text{尺} \times \frac{7}{264} = 1656\frac{47}{88}\text{立方尺}$$

訳：臣淳風等が謹んで按じますに、密率によると、体積は$1656\frac{47}{88}$立方尺である。

[27] **[劉注]按、此術圓錐下周以爲方錐下方、方錐下方今**[一]**自乘、以高乘之、(合)〔令〕**[二]**三而一、得大（錐方)〔方錐〕**[三]**之積。大（錐方)〔方錐〕**[三]**之積、合十二圓矣。(令)〔今〕**[四]**求一圓、復合十二除之。故令三乘十二得三十六、而連除。**

於徽術、當下周自乘、以高乘之、又以二十五乘之、九百四十二而一。圓錐比於方錐、亦二百分之一百五十七。令徑自乘者、亦當以一百五十七乘之、六百而一。其説如圓亭也。

校訂：[一]「今自乘」の「今」は、聚珍版、四庫本は「令」に作る。南宋本は「今」に作る。ここでは、南宋本に従う。

[二]「合三而一」の「合」は、郭書春に従って「令」の誤字とする。

[三]二つの「大錐方」は、李潢の校勘に従って「大方錐」に改める。なお、郭書春は、後のほうの「大方錐の方」の省略形であると考え、改める必要はないとする。楊輝本は、「大錐方之積」の五字は重出しない。

[四]南宋本は「令」に作るが、楊輝本、聚珍版、四庫本、郭書春の校勘は「今」に作る。今、後者に従う。

訓読：按ずるに、此の術、円錐の下周を以て方錐の下方と為す(55)。方錐の下方、今自乗し、高を以て之に乗じ、三にして一とせしむれば、大方錐の積を得べし。大方錐の積は、十二円に合す。今、一円を求むれば、復た合に十二もて之を除すべし。故に三をして十二に乗ぜしむれば三十六を得て連除す。

　徽の術に於いては、当に下周は自乗し、高を以て之に乗じ、又た二十五を以て之に乗じ、九百四十二にして一とすべし。円錐の方錐に比するや、亦た二百分の一百五十七なり。径をして自乗せしむるは(56)、亦た当に一百五十七を以て之に乗じ、六百にして一たるべし。其の説、円亭の如き也。

注：(55) 劉徽は、術文の「下周自乗」に着眼して、下周の長さを底面の1辺とする大方錐を考える。大方錐と円錐の水平方向の断面は、正方形と正円になり、その面積の比率は常に$4\pi:1$（$\pi=3$の場合、$12:1$）である。だから、円錐の体積は、大方

錐の体積の４π分の1になる。

円錐の体積＝大方錐の体積×$\frac{1}{4\pi}$＝下周^2×高さ×$\frac{1}{12\pi}$

π＝３を用いた場合には、円錐の体積＝下周^2×高さ×$\frac{1}{36}$となり、

徽率π＝$\frac{157}{50}$を用いた場合には、円錐の体積＝下周^2×高さ×$\frac{25}{942}$となる。

(56) 円錐の下周から直径を求め、直径を一辺とする方錐を考える場合には、円錐の体積は、方錐の体積の$\frac{\pi}{4}$倍$\left(\text{徽率}\pi=\frac{157}{50}\text{の場合、}\frac{157}{200}\text{倍}\right)$になる。

その場合の公式は、円錐の体積＝方錐の体積×$\frac{\pi}{4}$＝直径^2×高さ×$\frac{\pi}{12}$であり、

徽率π＝$\frac{157}{50}$を用いた場合には、円錐の体積＝直径^2×高さ×$\frac{157}{600}$となる。

訳：按ずるに、この術において、円錐の下周の長さを方錐の下辺（底面の正方形の1辺）とする。いま、方錐の下辺を自乗し、高さを掛け、そこで３で割ったとすると、大方錐の体積が得られる。大方錐の体積は、12個分の円錐（の体積）に合致する。いま、円錐１個分を求めようとするならば、また12で割るべきである。そこで、３を12に掛けて36を得て、連除する。

私めの術では、まさに下周を自乗し、高を掛け、また25を掛け、942で割るべきである。円錐の体積は、方錐と比べると、また200分の157である。直径を与えて自乗させた場合は、またまさに157を掛け、600で割るべきである。その説明は、円亭と同様である。

[28]**臣淳風等謹按、依密率、以七乘之、二百六十四而一。**

訓読：臣淳風等謹んで按ずるに、密率に依れば、七を以て之に乗じ、二百六十四にして一とす。

訳：臣淳風等が謹みて按じますに、密率によると、（下周を自乗し、高さを掛けた積実に）7を掛け、264で割る。

参考文献

１）李継閔『《九章算術》校証』（1993年９月）

２）郭書春『匯校九章算術』（2004年８月）

３）郭書春･劉鈍『算経十書』（遼寧教育出版社、1998年12月）、（九章出版社、2001年４月）

4）川原秀城「劉徽註九章算術」（『中国天文学・数学集』所収、1980年11月）
5）白尚恕『《九章算術》注釈』（1983年12月）
6）沈康身『九章算術導読』（1997年２月）
7）李継閔『《九章算術》及其劉徽注研究』（1992年８月）
8）李継閔『《九章算術》導読与訳注』（1998年９月）
9）李籍『九章算術音義』（文淵閣四庫全書本及び四部叢刊本『九章算術』所収）
10）「九章算術補註」（李儼『中算史論叢』（三）、1935年12月）
11）楊輝『詳解九章算法』（宜稼堂叢書本）
12）李潢『九章算術細草図説』（嘉慶庚辰（25年）語鴻堂刊本）
13）清水達雄『九章算術』1～15（「数学セミナー」1975年２月号～1976年４月号）
14）張家山漢簡『算数書』研究会編『漢簡『算数書』－中国最古の数学書－』（朋友書店、2006年10月）
15）Shen, Kang-Shen, Crossley, John N., Lun, Anthony W. C.『The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary』（Oxford Univ. Press, 1999年10月）
16）大川俊隆『九章算術』訳注稿（1）大阪産業大学論集　人文・社会科学編２号（2008年２月）
17）大川俊隆『九章算術』訳注稿（2）大阪産業大学論集　人文・社会科学編３号（2008年６月）
18）Chemla, Karine; Guo, Shuchun『Les neuf chapîtres, Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires』（Dunod, 2004年第４四半期）
19）大川俊隆『九章算術』訳注稿（3）大阪産業大学論集　人文・社会科学編４号（2008年10月）
20）大川俊隆『九章算術』訳注稿（4）大阪産業大学論集　人文・社会科学編５号（2009年２月）
21）馬場理恵子『九章算術』訳注稿（5）大阪産業大学論集　人文・社会科学編６号（2009年６月）
22）馬場理恵子『九章算術』訳注稿（6）大阪産業大学論集　人文・社会科学編７号（2009年10月）
23）銭宝琮点校『九章算術点校』（北京中華書局刊『算経十書』所収、1963年10月）
24）角谷常子、張替俊夫『九章算術』訳注稿（7）大阪産業大学論集　人文・社会科学編８号（2010年２月）
25）汪莱撰『校正九章算術及戴氏訂訛』（『衡齋遺書』所収）
26）角谷常子、張替俊夫『九章算術』訳注稿（8）大阪産業大学論集　人文・社会科学編９号（2010年６月）
27）田村誠、張替俊夫「新たに出現した二つの古算書―『数』と『算術』」大阪産業大学論集　人文・社会科学編９号（2010年６月）

28) 郭書春『九章算術訳注』（上海古籍出版社、2009年12月）
29) 田村誠、吉村昌之『九章算術』訳注稿 (9) 大阪産業大学論集　人文・社会科学編10号 (2010年10月）
30) 田村誠、吉村昌之『九章算術』訳注稿 (10) 大阪産業大学論集　人文・社会科学編11号 (2011年 2 月）
31) 田村誠、吉村昌之『九章算術』訳注稿 (11) 大阪産業大学論集　人文・社会科学編12号 (2011年 6 月）
32) 田村誠、吉村昌之『九章算術』訳注稿 (12) 大阪産業大学論集　人文・社会科学編13号 (2011年10月）
33) 朱漢民、陳松長主編『岳麓書院蔵秦簡 (貳)』（上海辞書出版社、2011年12月）
34) 小寺裕、武田時昌『九章算術』訳注稿 (13) 大阪産業大学論集　人文・社会科学編14号 (2012年 2 月）